Univerza v Mariboru
Fakulteta za logistiko

Zbirka nalog iz Matematičnih metod I

MAJA FOŠNER in BENJAMIN MARCEN

Celje 2010

Izdala: Univerza v Mariboru, Fakulteta za logistiko,
Mariborska cesta 7, 3000 Celje

Leto izida: Celje, 2010

Naslov: Zbirka nalog iz Matematičnih metod I

Avtor: izred. prof. dr. Maja Fošner in Benjamin Marcen

Recenzent: izred. prof. dr. Ajda Fošner

Lektoriral: izred. prof. dr. Ajda Fošner

Oblikoval in pripravil prelom: Benjamin Marcen

CIP - Katložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51(075.8)(076.1)(0.034.2)

FOŠNER, Maja
Zbirka nalog iz matematičnih metod I [Elektronski vir] / Maja Fošner in Benjamin Marcen. - El. knjiga. - Celje : Fakulteta za logistiko, 2010

Način dostopa (URL):
http://fl.uni-mb.si/wp-content/uploads/2011/04
/Prirocnik_Zbirka_nalog_MM1.pdf

ISBN 978-961-6562-47-8

1. Marcen, Benjamin

256073216

Predgovor

Zbirka nalog iz Matematičnih metod I vsebuje naloge in rešitve celotne snovi, ki je po učnem načrtu predpisana za študente prvega letnika univerzitetnega študijskega programa Tehniška logistika na Fakulteti za logistiko Univerze v Mariboru.

Namen zbirke nalog je z nalogami podkrepiti snov učbenika Matematične metode I in na ta način boljše razumevanje in ustrezna uporaba snovi, v povezavi z ostalimi aktivnostmi v sklopu predmeta Matematične metode I.

Kazalo

Poglavje 1

Osnove

1.1 Realna števila

1. Zapišite elemente množic:

   (a) $A = \{x \in \mathbb{N};\ x < 9\}$
   (b) $B = \{x \in \mathbb{Z};\ -3 < x \leq 5\}$
   (c) $C = \{x \in \mathbb{Z};\ 2 \cdot x = 7\}$
   (d) $D = \left\{x \in \mathbb{Q};\ x^2 = \frac{9}{64}\right\}$
   (e) $E = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 - 3 = 2\}$

   Rešitev.

   (a) Množica A vsebuje tista naravna števila, ki so manjša od 9.
   Torej: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
   (b) Množica B vsebuje tista cela števila, ki so večja od -3 ter manjša ali enaka 5. Torej: $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
   (c) Množica C vsebuje tista cela števila, ki rešijo enačbo $2 \cdot x = 7$.
   Rešitev je število 3,5.
   To število ni celo, torej je rešitev prazna množica. $C = \emptyset$.
   (d) Množica D vsebuje tista racionalna števila, katerih kvadrat je enak $\frac{9}{64}$. Takšni števili sta dve: $-\frac{3}{8}$ in $\frac{3}{8}$. Torej: $D = \left\{-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right\}$.
   (e) Množica E vsebuje tista realna števila, ki rešijo enačbo $x^2 - 3 = 2$.
   V množici realnih števil ima dana enačba dve rešitvi: $x = -\sqrt{5}$ ter $x = \sqrt{5}$. Torej: $E = \left\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right\}$.

2. Naj bodo dane množice $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ in $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

   Zapišite elemente množic:

   (a) $A \cup B$
   (b) $A \backslash B$
   (c) $A \cap B$
   (d) $B \backslash A$
   (e) $(A \cap B)^c$
   (f) $P(A)$
   (g) $A \times B$

Rešitev.

(a) V uniji množic $A \cup B$ so tista realna števila, ki so vsaj v eni od množic A ali B.
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(b) V množici $A \backslash B$ so tista realna števila, ki so v množici A in niso v množici B.
$A \backslash B = \{5\}$.

(c) V preseku množic $A \cap B$ so tista realna števila, ki so hkrati v obeh množicah A in B.
$A \cap B = \{1, 3\}$.

(d) V množici $B \backslash A$ so tista realna števila, ki so v množici B in niso v množici A.
$B \backslash A = \{2, 4\}$.

(e) V komplementu množice $A \cap B$ so tista realna števila, ki so v univerzalni množici $\mathcal{U}$ in niso v množici $A \cap B$.
$(A \cap B)^C = \{2, 4, 5, 6, 7\}$.

(f) Potenčna množica *P(A)* je množica vseh podmnožic množice A.

$$P(A) = \{\{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}, \emptyset\}.$$

(g) Kartezični produkt $A \times B$ je množica vseh urejenih parov (x, y), ki imajo prvo komponento iz množice A, drugo komponento pa iz množice B.

Torej je:
$A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4),$
$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4)\}.$

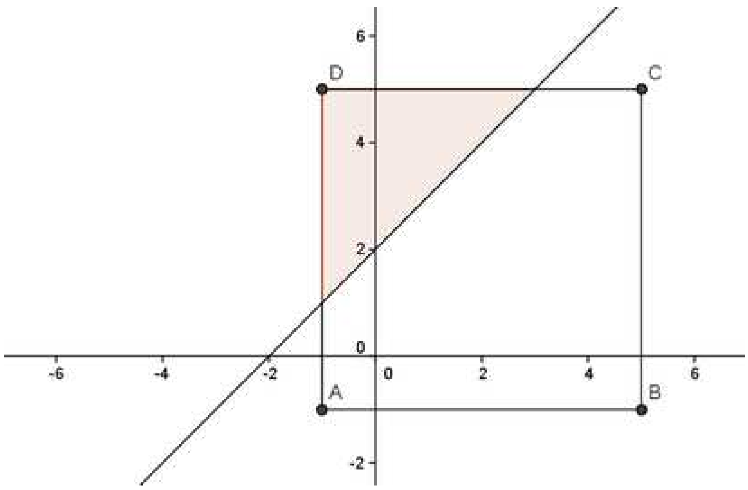
3. Grafično predstavite množici:

   (a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in\ [-1, 5]\ \wedge\ y \in\ [-1, 5] \wedge\ x - y + 2\ \leq 0\}$

   (b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \leq y + 2\ \ \wedge\ 3x - y\ \geq 0\}$

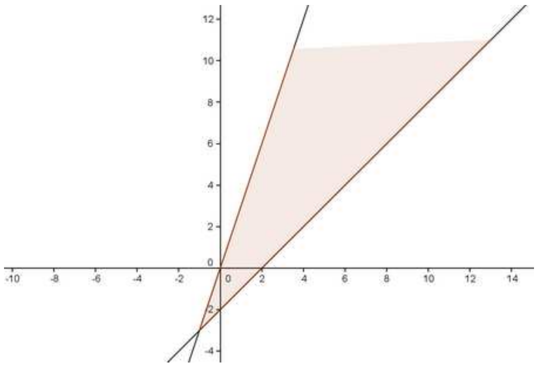
Rešitev.

(a) Prva dva pogoja določata kvadrat z oglišči $A(-1,-1)$, $B(5,-1)$, $C(5,5)$, $D(-1,5)$.
Iz zadnjega pogoja pa sledi $y \geq x + 2$, ki določa zaprto polravnino nad premico $y = x + 2$. Graf je na sliki (1.1).



Slika 1.1: Naloga 3.a

(b) Iz prvega pogoja sledi $y \geq x - 2$, ki določa zaprto polravnino nad premico $y = x - 2$, iz drugega pogoja pa sledi $y\ \leq 3x$, ki določa zaprto polravnino pod premico $y = 2x$.
Graf je na sliki (1.2).

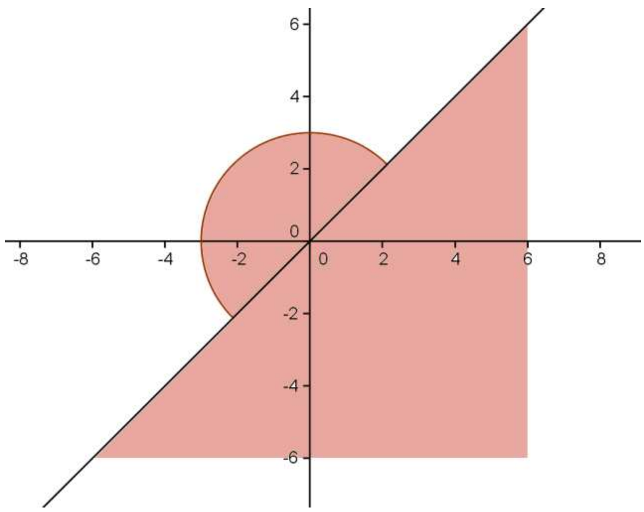


Slika 1.2: Naloga 3.b

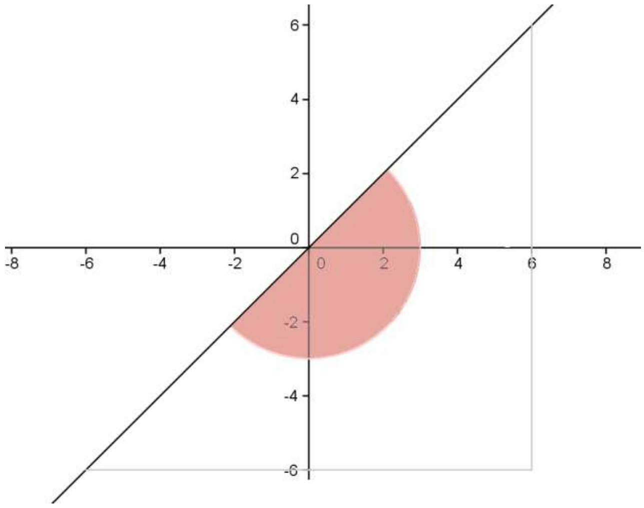
4. Za dani množici grafično predstavite njuno unijo, presek ter obe razliki. $A = \{(x, y);\ y \leq x\}$ in $B = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leq 9\}$

Rešitev.

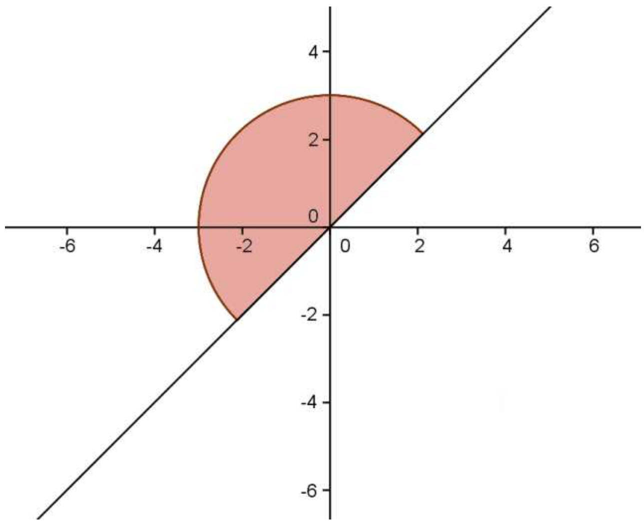
Prva relacija določa polravnino pod premico $y = x$, druga pa območje kroga s središčem v koordinatnem izhodišču in polmerom 3. ($x^2+y^2 = 3^2$ je enačba krožnice z izhodiščem v koordinatnem izhodišču in polmerom 3).



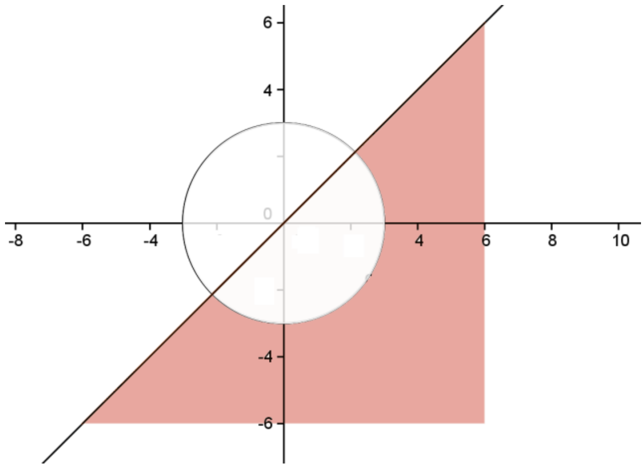
Slika 1.3: $A \cup B$



Slika 1.4: $A \cap B$



Slika 1.5: $A \backslash B$

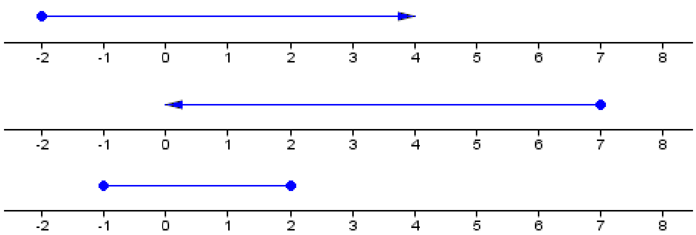


Slika 1.6: $B \backslash A$

5. Na številski premici predstavite intervale $A = [-2, 4)$, $B = (0, 7]$, $C = [-1, 2]$ ter zapišite intervale: $A \cup B$, $A \backslash C$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $(A \cap C) \backslash B$.

Rešitev.

Množice narišemo eno pod drugo.



Slika 1.7: Naloga 5

- V uniji množic $A \cup B$ so tista realna števila, ki so vsaj v eni od množic A ali B. Nazorno to na sliki pomeni "tam, kjer je vsaj ena odebeljena črta".
  $A \cup B = [-2, 7]$.

- V množici $A \backslash C$ so tista realna števila, ki so v množici A in niso v množici C. Nazorno to na sliki pomeni, da iz množice A izločimo "tisti del, kjer je črta dvojna".
  $A \backslash C = [-2, -1) \cup (2, 4)$.

- V preseku množic $A \cap C$ so tista realna števila, ki so hkrati v obeh množicah A in C. Nazorno to na gornji sliki pomeni "dvojno odebeljeno črto".
  $A \cap B = (0, 4)$.

- $A \backslash B = [-2, 0]$.

- $(A \cap C) \backslash B = [-1, 0]$.

6. V množici realnih števil rešite enačbe:

   (a) $-(x-2)^2 = 2x - 3 - (x-1)(x+3)$
   (b) $3(2-x) - 4(-3+x) = 2x + 4$
   (c) $2 + 3x + (x+3)^2 = x^2 + 11 + 9x$
   (d) $(x+2)^2 - (x+7)x = -3x$
   (e) $x^2 - x = 12$
   (f) $2x^2 - 3x + 1 = 0$
   (g) $x^2 - 2x + 7 = 0$
   (h) $x^3 - 2x^2 = 11x - 12$

Rešitev.

(a) Enačbo rešimo na sledeči način:

- Odpravimo oklepaje: $-x^2 + 4x - 4 = 2x - 3 - x^2 - 2x + 3$.
- Skrčimo izraz in po ureditvi dobimo enačbo $4x = 4$ z rešitvijo $x = 1$.

(b) Enačbo rešimo po istem postopku kot v prejšnjem primeru in dobimo rešitev: $x = \frac{14}{9}$.

(c) Po ureditvi dobimo identično izpolnjeno enačbo $0 = 0$, kar pomeni, da je vsako realno število $x \in \mathbb{R}$ rešitev dane enačbe.
Množica rešitev je $\mathbb{R}$.

(d) Po ureditvi dobimo prostislovno enačbo $4 = 0$, kar pomeni, da nobeno realno število ne reši dane enačbe. Množica rešitev enačbe je prazna.

(e) Enačba je kvadratna. Uredimo jo tako, da so vsi neničelni členi na eni (levi) strani enačbe $x^2 - x - 12 = 0$.

- Razstavimo izraz na levi strani po Vietovem pravilu

$$x^2 + (a + b)\,x + ab = (x + a)\,(x + b)$$

  in dobimo $(x + 3)\,(x - 4) = 0$.

- Produkt $(x + 3)\,(x - 4)$ je enak 0, kadar je eden od faktorjev enak 0: $(x + 3) = 0$ ali $(x - 4) = 0$.

- Dobimo dve rešitvi: $x_1 = -3$ in $x_2 = 4$.

(f) Rešitve kvadratne enačbe $ax^2+bx+c = 0$ izračunamo po naslednjem postopku:

$$D = b^2 - 4ac, x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \tag{1.1}$$

V našem primeru ($2x^2 - 3x + 1 = 0$) je $a = 2,\ b = -3,\ c = 1$. Iz tega sledi

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1, \quad x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$x_1 = \frac{3+1}{4} = 1, \quad x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}.$$

(g) Po (1.1) dobimo $D = -24$. Rešitev $\sqrt{D} = \sqrt{-24}$ ni realno število, zato dana enačba nima realnih rešitev.

(h) Kadar je izraz na levi strani enačbe (stopnje višje od 2) rešitev x_1 poiščemo s pomočjo pravil za ugotavljanje ničel polinoma. Pravili sta naslednji:

i. Cele ničle polinoma s celimi koeficienti iščemo samo med delitelji prostega člena.

ii. Racionalne ničle polinoma s celimi koeficienti iščemo samo med ulomki, ki imajo v števcu delitelj prostega člena, v imenovalcu pa delitelj vodilnega koeficienta.

- S pomočjo pravil uganemo: $x_1 = 1$.

- Delimo:

$$
\begin{array}{l}
\quad (x^3 - 2x^2 - 11x + 12) : (x - 1) = x^2 - x - 12 \\
-(x^3 - x^2) \\
\qquad\quad - x^2 - 11x + 12 \\
\qquad - (-x^2 + x) \\
\qquad\qquad\quad - 12x + 12 \\
\qquad\qquad -(-12x + 12)
\end{array}
$$

- Dobljeno enačbo zapišemo v razstavljeni obliki

$$\left(x^3 - 2x^2 - 11x + 12\right) = (x + 3)\,(x - 4)\,(x - 1) = 0.$$

- Izračunamo rešitve: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = -3$.
  Opomba: Namesto deljenja lahko uporabimo Hornerjev algoritem.

7. Rešite iracionalno enačbo in napravite preizkus.

$\sqrt{2x-3}-2=x-5$

Rešitev.

Enačbo uredimo tako, da izraz pod koren postavimo na eno stran enačbe:

$$\sqrt{2x-3}=x-3.$$

- Enačbo kvadriramo (odpravimo koren):

$$2x-3=x^2-6x+9.$$

- Rešimo kvadratno enačbo: $x^2-8x+12=0$.
- Izračunamo rešitve: $x_1=2$ in $x_2=6$.
- Napravimo preizkus: $x_1=2$ in $x_2=6$ vstavimo v prvotno enačbo.
- Ugotovimo: x_1 ne ustreza prvotni enačbi, x_2 pa ustreza.
- Rešitev prvotne enačbe je le $x_2=6$.

  Opomba: Če med reševanjem enačbo kvadriramo, je preizkus obvezen. Kvadrirana enačba ima (navadno) več rešitev od prvotne.

8. Rešite eksponentne in logaritemske enačbe:

(a) $3^{(x-1)x}=\left(\frac{1}{27}\right)^{x-1}$

(b) $\log_{\sqrt{2}}x=4$

(c) $\log_x 3=\log_x 27\ -\ln e^2$

Rešitev.

(a) Enakost $3^{(x-1)x}=\left(3^{-3}\right)^{x-1}$ da enakost eksponentov $(x-1)\,x=-3\,(x-1)$ in rešitev $x_1=1$ in $x_2=-3$.

(b) Po definiciji logaritma je $x=\left(\sqrt{2}\right)^4$, torej $x=4$.

(c) Enačbo uredimo tako, da logaritme postavimo na levo stran enačbe

$$\log_x 27 - \log_x 3 \ = \ln e^2 \ .$$

- Po definiciji velja: $\log_x 27 - \log_x 3 \ = \log_x \frac{27}{3} = \ \log_x 9$.
- Sledi: $\log_x 9 = 2$.
- Rešitev je enaka $x^2 = 9$, torej $x_1 = 3$ in $x_2 = -3$.

9. V množici realnih števil rešite naslednje neenačbe:

(a) $2\,(x-3) \leq -3\,(1-2x)+5$

(b) $x^2 + 2x > 15$

(c) $\frac{-2+x}{x+4} \leq 0$

Rešitev.

(a) Linearno neenačbo rešimo na sledeči način:

- Odpravimo oklepaje ter člene z neznanko x prenesemo na levo stran neenačbe. Neenačbo uredimo.

$$-4x \leq 8.$$

- Če je koeficient pri neznanki x negativen, neenačbo množimo z - 1. Pri tem se neenakost obrne:

$$4x \geq -8.$$

- Po deljenju s (pozitivnim) številom 4 dobimo rešitev:

$$x \geq \frac{-8}{4}.$$

- Rešitev je $x \geq -2$ oziroma $x \in [-2, \infty)$.

(b) Kvadratne neenačbe in neenačbe višjih stopenj rešimo na sledeči način:

- Vse člene prenesemo na levo stran:

$$x^2 + 2x - 15 > 0.$$

- Enačbo razstavimo: $(x-3)(x+5) = 0$. Rešitvi sta: $x_1 = 3$ in $x_2 = -5$.

- Izberemo vrednost med -5 in 3, ki sta ničli izraza. Pomagamo si z grafom ali realno osjo.

- Če izberemo vrednost $x = 0$, je vrednost izraza v tej točki enaka -15. Funkcijska vrednost je negativna.

- Vrednost izraza $x^2 + 2x - 15$ je torej povsod, na intervalu med ničlama, negativna.

- V vsaki od ničel pa se predznak spremeni.
- Tako lahko zapišemo interval, kjer je izraz strogo pozitiven:

$$x \in (-\infty, -5) \cup (3, \infty)\,.$$

(c) Če imamo na levi strani neenakosti (urejene tako, da je na desni vrednost 0) racionalen izraz, na realno os narišemo vse ničle števca in imenovalca. Racionalen izraz spremeni predznak bodisi v ničli števca bodisi v ničli imenovalca. Iz ustrezne slike odčitamo rešitev (kot v prejšnjih primerih): $x \in (-4, 2]$. Pomagamo si lahko tudi tako, da narišemo graf dane racionalne funkcije in odčitamo rešitev.

Opomba: ničla imenovalca -4 ni rešitev (tam neenačba ni definirana), ničla števca 2 je rešitev (neenakost ni stroga).

10. Rešite sistem neenačb:

(a) $x+2 \geq 0$ in $-3+2x<1$

(b) $x+7<6$ in $x^2-13<3$

(c) $\frac{2x+6}{-x+1}<0$ in $x^2-5x \geq -6$

Rešitev.

(a) Rešimo vsako neenačbo posebej:

i. $x+2 \geq 0$: $x \in [-2, \infty)$.

ii. $-3+2x<1$: $x \in (-\infty, 2)$.

Obe neenačbi rešijo tisti $x \in \mathbb{R}$, ki so v preseku rešitev posameznih enačb:

$$x \in [-2, \infty) \cap (-\infty, 2) = [-2, 2).$$

(b) i. $x+7<6$: $x \in (-\infty, -1)$.

ii. $x^2-13<3$: $x \in (-4, 4)$.

Obe neenačbi rešijo tisti $x \in \mathbb{R}$, ki so v preseku rešitev posameznih enačb:

$$x \in (-\infty, -1) \cap (-4, 4) = (-4, -1).$$

(c) i. $\frac{2x+6}{-x+1}<0$: $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$

ii. $x^2-5x \geq -6$: $x \in (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$

Obe neenačbi rešijo tisti $x \in \mathbb{R}$, ki so v preseku rešitev posameznih enačb:

$$x \in (-\infty, -3) \cup (1, 2] \cup [3, \infty).$$

11. Dano množico zapišite kot interval in mu določite maksimum, minimum, supremum ter infimum množice.

   (a) $A = \{x \in \mathbb{R};\ \ 7 \geq x - 3 > -2\}$
   (b) $B = \{x \in \mathbb{R};\ \ x - 3 < 2x + 1 \leq -3x + 6\}$

Rešitev.

(a) Množica A vsebuje tiste $x \in \mathbb{R}$, ki ustrezajo neenačbama

   i. $7 \geq x - 3$ z rešitvijo $10 \geq x$ oziroma $x \in (-\infty, 10]$ in
   ii. $x - 3 > -2$ z rešitvijo $x > 1$ oziroma $x \in (1, \infty)$.

   Obema neenačbama ustrezajo tisti $x \in \mathbb{R}$, ki so v preseku rešitev posameznih neenačb: $A = (-\infty, 10] \cap (1, \infty) = (1, 10]$ oziroma

$$A = \{x \in \mathbb{R};\ \ 1 < x \leq 10\}$$

   Zapišimu supremum, infimum, maksimum in minimum množice A:

   - $\sup A = 10$ (najmanjša zgornja meja)
   - $\inf A = 1$ (največja spodnja meja)
   - $\max A = 10$ (največje število množice A)
   - $\min A$ ne obstaja (množica A ne vsebuje najmanjšega števila, saj infimum ni vsebovan v množici)

(b) Množica B vsebuje tiste $x \in \mathbb{R}$, ki ustrezajo neenačbama

   i. $x - 3 < 2x + 1$ z rešitvijo $-4 < x$ oziroma $x \in (-4, \infty)$
   ii. $2x + 1 \leq -3x + 6$ rešitvijo $x \leq 1$ oziroma $x \in (-\infty, 1]$

$$B = \{x \in \mathbb{R};\ \ -4 < x \leq 1\}$$

   Zapišimu supremum, infimum, maksimum in minimum množice A:

   - $\max B = 1$
   - $\min B =$ ne obstaja
   - $\sup B = 1$
   - $\inf B = 4$.

12. V množici realnih števil rešite naslednje enačbe, neenačbe in sistem neenačb z absolutno vrednostjo:

(a) $|x-3|=5$

(b) $|x-4|=|x+5|+3-x$

(c) $|2x-3|<5$

(d) $x-|x|<|x+5|-13$

Rešitev.

(a) Najprej zapišemo:

$$|x-3|=\begin{cases} x-3, & x-3\geq 0 \\ -(x-3), & x-3<0 \end{cases}$$

- Če je $x\geq 3$ postavimo pred absolutno vrednost predznak + in rešimo enačbo. Torej je:

$$|x-3|=(x-3)=5$$
$$x=8.$$

- Če je $x<3$ pa pred absolutno vrednost postavimo znak $-$.

$$-|x-3|=-(x-3)=5$$
$$-x=5-3$$
$$x=-2.$$

Enačba ima dve rešitvi $x_1=8, \quad x_2=-2.$

(b) Zapišemo pogoja:

$$|x-4|=\begin{cases} x-4, & x-4\geq 0 \\ -(x-4), & x-4<0 \end{cases}$$

$$|x+5|=\begin{cases} x+5, & x+5\geq 0 \\ -(x+5), & x+5<0 \end{cases}$$

Kadar nastopata v enačbi dve absolutni vrednosti z neznanko zapišemo štiri pogoje.

- Če je $x \geq 4$ in $x \geq -5$ velja skupen pogoj $x \geq 4$.
  Rešimo enačbo:

$$(x-4) = (x+5) + 3 - x$$
$$x = 12.$$

  $x = 12$ je rešitev, ker ustreza pogoju $x \geq 4$.

- Če je $x < 4$ in $x < -5$ velja skupen pogoj $x < -5$.
  Rešimo enačbo:

$$-(x-4) = -(x+5) + 3 - x$$
$$x = -6.$$

  $x = -6$ je rešitev, ker ustreza pogoju $x < -5$.

- Če je $x \geq 4$ in $x < -5$ skupnega pogoja NI.

- Če je $x < 4$ in $x \geq -5$ velja skupen pogoj $-5 \leq x < 4$.
  Rešimo enačbo:

$$-(x-4) = (x+5) + 3 - x$$
$$x = -4.$$

  $x = -4$ je rešitev, ker ustreza pogoju $-5 \leq x < 4$.

Rešitve enačbe so tri: $x_1 = 12, \quad x_2 = -6, \quad x_3 = -4.$

(c) Neenačbe rešujemo podobno kot enačbe.

Najprej zapišimo:

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3, & 2x-3 \geq 0 \\ -(2x-3), & 2x-3 < 0 \end{cases}$$

- Če je $x \geq \frac{3}{2}$, postavimo pred absolutno vrednost predznak $+$ in rešimo neenačbo.

$$(2x-3) < 5$$

$$x < 4.$$

Rešitev je: $\frac{3}{2} \leq x < 4$.

- Če je $x < \frac{3}{2}$, pa pred absolutno vrednost postavimo znak $-$.

$$-(2x-3) < 5$$

$$-2x < 5-3$$

$$x > -1$$

Rešitev je: $-1 < x < \frac{3}{2}$.

Skupna rešitev neenačbe je: $(-1, 4)$.

(d) Ponovno bomo uporabili štiri pogoje.

Zapišemo pogoja:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -(x), & x < 0 \end{cases}$$

$$|x+5| = \begin{cases} x+5, & x+5 \geq 0 \\ -(x+5), & x+5 < 0 \end{cases}$$

- Če je $x \geq 0$ in $x \geq -5$ velja skupen pogoj $x \geq 0$.
  Rešimo neenačbo:

$$x - (x) < (x + 5) - 13$$
$$x > 8.$$

  Rešitev je: $x > 8$.

- Če je $x < 0$ in $x < -5$ velja skupen pogoj $x < -5$.
  Rešimo neenačbo:

$$x - (-(x)) < -(x + 5) - 13$$
$$3x < -18$$
$$x < -6$$

  Rešitev je: $x < -6$.

- Če je $x \geq 0$ in $x < -5$ skupnega pogoja NI.

- Če je $x < 0$ in $x \geq -5$ velja skupen pogoj $-5 \leq x < 0$.
  Rešimo neenačbo:

$$x - (-(x)) < (x + 5) - 13$$
$$x < -8$$

  Skupne rešitve NI.

  Rešitev neenačbe je: $(-\infty, -6) \cup (8, \infty)$.

1.2 Kompleksna števila

1. Izračunajte:

   (a) $(i+3)\left(2-i\sqrt{3}\right)$

   (b) $(i+2)^2-\left(1-i\sqrt{3}\right)^2$

   (c) $2i^{10}-(-2i^3)^3$

   (d) $\frac{2i+1}{-i+1}$

Rešitev.

(a) Kompleksna števila seštevamo (odštevamo) po komponentah, množimo (potenciramo) jih kakor dvočlenike.
$(i+3)\left(2-i\sqrt{3}\right)=2i-i^2\sqrt{3}+6-3i\sqrt{3}=$ (upoštevamo $i^2=-1$)

$$=2i+\sqrt{3}+6-3i\sqrt{3}=\left(6+\sqrt{3}\right)+i\left(2-3\sqrt{3}\right).$$

(b) Kot zgoraj: $(i+2)^2-\left(1-i\sqrt{3}\right)^2=5+i\left(4+2\sqrt{3}\right)$.

(c) Za zaporedne potence števila i velja:

$$i^2=-1,\quad i^3=-i,\quad i^4=1,\quad i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i$$

$$\mathrm{i}^{4k}=1,\quad i^{4k+1}=i,\quad i^{4k+2}=-1,\quad i^{4k+3}=-i,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Uporabimo zgoraj zapisano:

$$2i^{10}-\left(-2i^3\right)^3=2\,(-1)-\left(-8i^9\right)=-2+8i.$$

(d) Kompleksna števila delimo tako, da števec in imenovalec množimo z imenovalcu konjugiranim kompleksnim številom.

$$\frac{2i+1}{-i+1}=\frac{2i+1}{-i+1}\cdot\frac{i+1}{i+1}=\frac{-1+3i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i.$$

2. Dano je kompleksno število $z = 2 - 4i$.

   Izračunajte

$$Re\,(z)\,, \quad Im\,(z)\,, \quad \overline{z}, \quad |z|\,, \quad \frac{z + \overline{z}}{1 - z \cdot \overline{z}}$$

   Rešitev.

   (a) Realna komponenta kompleksnega števila z: $Re\,(z) = 2$.

   (b) Imaginarna komponenta kompleksnega števila z: $Im\,(z) = -4$.

   (c) Številu z konjugirano kompleksno število $\overline{z}$ dobimo, če spremenimo predznak imaginarne komponente: $\overline{z} = 2 + 4i$.

   (d) Absolutna vrednost kompleksnega števila $|z|$ pomeni oddaljenost kompleksnega števila z od izhodišča. Izračunamo jo po Pitagorovem izreku: $|z| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

   (e) $\frac{z+\overline{z}}{1-z\cdot\overline{z}} = \frac{2-4i+2+4i}{1-(2-4i)(2+4i)} = \frac{4}{1-(4+16)} = -\frac{4}{19}$.

3. V množici kompleksnih števil rešite naslednje enačbe:

   (a) $z^2 + 16 = 0$

   (b) $z^2 - 2z + 3 = 0$

   (c) $iz^2 + (4 - i)\,z - 2 = 0$

   Rešitev.

   (a) Enačba $z^2 = -16$ ima v množici kompleksnih števil rešitvi

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{-16} = \pm\sqrt{16}\sqrt{-1} = \pm 4i.$$

   (b) Uporabimo formulo za izračun korenov kvadratne enačbe.

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}i}{2} = 2 \pm \sqrt{2}i$$

Opomba: Kompleksni rešitvi kvadratne enačbe z realnimi koeficienti sta med sabo konjugirani.

(c) Formula za izračun korenov kvadratne enačbe velja tudi, če koeficienti $a,\ b,\ c$ niso realna števila.

$$D = (4-i)^2 - 4\,(i)\,(-2) = 15$$

$$z_{1,2} = \frac{-\,(4-i) \pm \sqrt{15}}{2i} = \frac{-4+i \pm \sqrt{15}}{2i} = \frac{1}{2} + \frac{4 \pm \sqrt{15}}{2}i$$

$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{4+\sqrt{15}}{2}i,\, z_1 = \frac{1}{2} + \frac{4-\sqrt{15}}{2}i.$$

4. Poiščite kompleksna števila z, ki ustrezajo:

(a) $|z| - z = 3 + 2i$
(b) $\mathrm{Re}(z + iz) = 2$ in $\mathrm{Im}(z) = -1$
(c) $|z - 2 + 2i| = 1$ in $\mathrm{Re}(z - 2 + 2i) = 1$
(d) $|\overline{z} - (2-3i)\,i| = |z + i + x|$
(e) $|\overline{z} - 2i| \leq 5$

Rešitev.

(a) Če v enačbi nastopa bodisi konjugirana vrednost bodisi absolutna vrednost bodisi realna ali imaginarna komponenta kompleksnega števila z, iščemo neznano število z v obliki $z = x + yi$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$.

- Vstavimo $z = x + yi$ v enačbo in dobimo:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - (x + yi) = 3 + 2i.$$

Kompleksni števili sta enaki, če imata enako realno in imaginarno komponento.

- Enakost imaginarnih komponent da enačbo $-yi = 2i$ in rešitev $y = -2$.
- Enakost realnih komponent da enačbo $\sqrt{x^2 + y^2} - x = 3$ (vstavimo $y = -2$), $\sqrt{x^2 + 4} - x = 3$ in $x = -\frac{5}{6}$.
- Iskano kompleksno število je $z = -\frac{5}{6} - 2i$.

(b) Kompleksno število z zapišemo v obliki $z = x + yi$.

- Iz druge enačbe dobimo $\mathrm{Im}(z) = -1 = y$.
- Dobljeni y vstavimo v prvo enačbo.
- Enačbi $\mathrm{Re}(z + iz) = 2$ in $x - y = 2$ nam data rešitev $x = 1$.
- Iskano kompleksno število je $z = 1 - i$.

(c) Kompleksno število z zapišemo v obliki $z = x + yi$.

- Iz druge enačbe dobimo $\mathrm{Re}(z - 2 + 2i) = 1 = x - 2$ z rešitvijo $x = 3$.
- Izračunani x vstavimo v prvo enačbo in dobimo

$$|3 + yi - 2 + 2i| = |1 + (y + 2)\, i| = \sqrt{1^2 + (y + 2)^2} = 1.$$

- Dobimo kvadratno enačbo: $1 + y^2 + 4y + 4 = 1$ z rešitvijo $y = 2$.
- Iskano kompleksno število je $z = 3 - 2i$.

(d) Kompleksno število $z = x + yi$ vstavimo v enačbo in dobimo:

$$|x - yi - (2 - 3i)\, i| = |(x + yi) + i + x|$$

$$|x - yi - 2i - 3| = |2x + yi + i|$$

$$|x - 3 + (-y - 2)\, i| = |2x + (y + 1)\, i|$$

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (-y - 2)^2} = \sqrt{(2x)^2 + (y + 1)^2}$$

od koder izrazimo $y = \frac{3x^2+6x-12}{2}$.

Enačbo rešijo vsa kompleksna števila, katerih komponenti sta enaki:

$$z = x + \left(\frac{3x^2 + 6x - 12}{2}\right) i, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(e) Kompleksno število $z = x + yi$ vstavimo v enačbo in dobimo:

$$|x + (-y - 2)\, i| \leq 5$$

$$\sqrt{x^2 + (y + 2)^2} \leq 5$$

$$x^2 + (y + 2)^2 \leq 5^2$$

Rešitev predstavljajo števila, ki ležijo (v notranjosti kroga in na krožnici) s središčem v točki $S(0,\ -2)$ in polmerom 5.

5. Zapišite kompleksno število z v polarni obliki.

(a) $z = \sqrt{8} + i$

(b) $z = 5\sqrt{3} - 5i$

(c) $z = -12 - 4\sqrt{3}i$

Rešitev.

(a) Oddaljenost števila z od izhodišča je $|z| = \sqrt{8 + 1} = 3$.
Kot, ki ga tvori poltrak iz izhodišča skozi z s pozitivnim poltrakom realne osi je enak

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x} + k\pi.$$

Za k izberemo tako število 0, 1, 2, da bo φ ležal v istem kvadrantu kot točka $z\,(x, y)$.

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{8}} + k\pi$$

$$\varphi = 19,47^{\circ} + k\pi$$

Za k izberemo število 0, saj točka $z\left(\sqrt{8}, 1\right)$ leži v prvem kvadrantu.

$$z = 3\left(\cos\left(19,47^{\circ}\right) + i\sin\left(19,47^{\circ}\right)\right).$$

(b) Oddaljenost števila z od izhodišča je $|z| = \sqrt{75+5} = \sqrt{80}$. Točka $z\left(5\sqrt{3}, -5\right)$ leži v četrtem kvadrantu. Kot, ki ga tvori poltrak iz izhodišča skozi z s pozitivnim poltrakom realne osi je

$$\tan^{-1}\frac{-5}{5\sqrt{3}} = -30^{\circ}$$

$$\varphi = -30^{\circ} + 2\pi$$

$$z = \sqrt{80}\left(\cos\left(330^{\circ}\right) + i\sin\left(330^{\circ}\right)\right)$$

(c) Oddaljenost števila z od izhodišča je $|z| = \sqrt{144+48} = \sqrt{192}$. Točka $z\left(-12, -4\sqrt{3}\right)$ leži v tretjem kvadrantu. Kot, ki ga tvori poltrak iz izhodišča skozi z s pozitivnim poltrakom realne osi je

$$\tan^{-1}\frac{-4\sqrt{3}}{-12} = 30^{\circ}$$

$$\varphi = 30^{\circ} + 1\pi$$

$$z = \sqrt{192}\left(\cos\left(210^{\circ}\right) + i\sin\left(210^{\circ}\right)\right)$$

6. Izračunajte potenco.

$$\left(-\sqrt{2}i+\sqrt{3}+4\sqrt{2}i\right)^6$$

Rešitev.

Prednost polarnega zapisa kompleksnega števila

$$z=|z|\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\ \right)$$

se pokaže pri potenciranju in korenjenju.
Velja:

$$z^n=|z|^n\left(\cos\left(n\varphi\right)+i\sin\left(n\varphi\right)\right)$$

- Dano število zapišemo v polarnem zapisu:

$$z=\sqrt{21}\left(\cos\left(67,80^{\circ}\right)\ +i\sin\left(67,80^{\circ}\right)\right)$$

- Potenciramo z uporabo gornje formule:

$$z^6=\left(\sqrt{21}\right)^6\left(\cos\left(6\left(67,80^{\circ}\right)\right)\ +i\sin\left(6\left(67,80^{\circ}\right)\right)\right)$$

$$\left(-\sqrt{2}i+\sqrt{3}+4\sqrt{2}i\right)^6=9261\left(0,68+i0,728\right)=6297+6751i.$$

7. Rešite enačbo

$$z^3=4-i.$$

Rešitev.

Rešitev enačbe

$$z^n=r\left(\cos\left(\varphi\right)\ +i\sin\left(\varphi\right)\right)$$

je n različnih korenov kompleksnega števila $r\left(\cos\left(\varphi\right)+i\sin\left(\varphi\right)\right)$.

$$z_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\ +i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right),\quad k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

- Kompleksno število na desni strani enačbe zapišemo v polarni obliki

$$4 - i = r\left(\cos\left(\varphi\right)\ + i\sin\left(\varphi\right)\right)$$

$$4 - i = \sqrt{17}\left(\cos\left(346^{\circ}\right)\ + i\sin\left(346^{\circ}\right)\right).$$

- Po zgoraj navedeni formuli zapišemo 3 korene dane enačbe:

$$z_0 = \sqrt[3]{\sqrt{17}}\left(\cos\left(\frac{346^0 + 2\cdot 0\cdot \pi}{3}\right)\ + i\sin\left(\frac{346^0 + 2\cdot 0\cdot \pi}{3}\right)\right) =$$

$$z_0 = \sqrt[6]{17}\left(\cos\left(115,33^0\right)\ + i\sin\left(115,33^0\right)\right)$$

$$z_1 = \sqrt[3]{\sqrt{17}}\left(\cos\left(\frac{346^0 + 2\cdot 1\cdot \pi}{3}\right)\ + i\sin\left(\frac{346^0 + 2\cdot 1\cdot \pi}{3}\right)\right) =$$

$$z_1 = \sqrt[6]{17}\left(\cos\left(235,33^0\right)\ + i\sin\left(235,33^0\right)\right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{\sqrt{17}}\left(\cos\left(\frac{346^0 + 2\cdot 2\cdot \pi}{3}\right)\ + i\sin\left(\frac{346^0 + 2\cdot 2\cdot \pi}{3}\right)\right) =$$

$$z_2 = \sqrt[6]{17}\left(\cos\left(355,33^0\right)\ + i\sin\left(355,33^0\right)\right).$$

8. Izračunajte:

$$z = \sqrt[3]{2 - 3i\sqrt{2}}$$

Rešitev.

Najprej zapišemo kompleksno število z v polarni obliki.

$$z = 2 - 3\sqrt{2}i$$

$$|z| = \sqrt{(2)^2 + \left(-3\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4 + 18} = \sqrt{22}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{-3\sqrt{2}}{2} = -64,8^\circ$$

$$z = \sqrt{22}\left(\cos 295,2^\circ + i\sin 295,2^\circ\right).$$

Poiščimo sedaj n različnih korenov kompleksnega števila z.

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right), \qquad k = 0, 1, 2.$$

$$z_0 = \sqrt[3]{\sqrt{22}}\left(\cos\left(\frac{295,2^\circ + 2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{295,2^\circ + 2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right)\right),$$

$$z_0 = \sqrt[6]{22}\left(\cos\left(98,4^\circ\right) + i\sin\left(98,4^\circ\right)\right),$$

$$z_1 = \sqrt[3]{\sqrt{22}}\left(\cos\left(\frac{295,2^\circ + 2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{295,2^\circ + 2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right)\right),$$

$$z_1 = \sqrt[6]{22}\left(\cos\left(218,33^\circ\right) + i\sin\left(218,33^\circ\right)\right),$$

$$z_2 = \sqrt[3]{\sqrt{22}}\left(\cos\left(\frac{295,2^\circ + 2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{295,2^\circ + 2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right)\right),$$

$$z_2 = \sqrt[6]{22}\left(\cos\left(338,33^\circ\right) + i\sin\left(338,33^\circ\right)\right).$$

1.3 Razmerja in sorazmerja

1. Iz razmerja $x : 5 = 7 : 25$ določite neznano število x.

   Rešitev. Ker je $5 \cdot 7 = 25 \cdot x$ je $x = \frac{7}{5}$.

2. Sorazmerji
$$a : b = 2 : 5 \text{ in } b : c = 7 : 16$$
   zapišite v obliki razširjenega razmerja.

   Rešitev. Podani sorazmerji želimo zapisati v obliki $a : b : c = x : y : z$. Določiti moramo neznanke x, y in z. Iz prvega razmerja vidimo, da je $5a = 2b$, iz česar sledi $b = \frac{5}{2}a$. Iz drugega razmerja $7c = 16b$ lahko izrazimo c in dobimo $c = \frac{16}{7}b$. Ker je $b = \frac{5}{2}a$, je $c = \frac{16}{7} \cdot \frac{5}{2}a = \frac{80}{14}a$. Iz tega sledi, da je
$$a : b : c = 1 : \frac{5}{2} : \frac{80}{14}.$$
   Rešitev lahko zapišemo tudi v obliki
$$a : b : c = 2 : 5 : \frac{80}{7} \text{ ali } a : b : c = 14 : 35 : 80 \text{ itd.}$$

3. Proizvodnja lesenih izdelkov izdela enaki naročili šestih kupcev v 24 dneh. Koliko dni potrebuje proizvodnja, da izpolni naročila dvanajstih kupcev?

   Rešitev. Vidimo, da v primeru nastopata dve spremenljivki, kupci in dnevi. Spremenljivki sta premo sorazmerni. Namreč, več naročil ima proizvodnja, več časa potrebuje za izdelavo. Naj bo x število dnevov, ki jih potrebuje proizvodnja, da izpolni enaka naročila petih kupcev. Torej je
$$\begin{array}{rcl} 6 \text{ kupci} & \ldots & 24 \text{ dni} \\ 12 \text{ kupcev} & \ldots & x \text{ dni} \end{array}$$

Iz tega sledi, da je $6x = 24 \cdot 12$ in zato

$$x = \frac{24 \cdot 12}{6} = 48.$$

Proizvodnja potrebuje za dvanajst enakih naročil 48 dni.

4. Za 35 kosov blaga plačamo 700 denarnih enot. Koliko plačamo za 45 kosov istega blaga?

Rešitev. Vidimo, da v nalogi nastopata dve spremenljivki, blago in cena. Spremenljivki sta premo sorazmerni. Namreč, več blaga kupimo, več plačamo. Označimo z x iskano količino. Potem je

$$\begin{array}{lcl} 35 \text{ kosov blaga} & \ldots & 700 \text{ denarnih enot} \\ 45 \text{ kosov blaga} & \ldots & x \text{ denarnih enot} \end{array}$$

Iz tega sledi, da je $35x = 700 \cdot 45$ in zato

$$x = \frac{700 \cdot 45}{35} = 900.$$

Za 45 kosov istega blaga moramo plačati 900 denarnih enot.

5. Sedem zajcev pospravi travo v devetih dneh. V kolikšnem času bi trije zajci pospravili travo?

Rešitev. V zastavljeni nalogi nastopata dve spremenljivki: število zajcev in dnevi. Več zajcev je na travniku, manj časa lahko uživajo. Vidimo, da sta spremenljivki v obratne sorazmerju. Naj bo x iskana spremenljivka, število dnevov. Potem je

$$\begin{array}{rcl} 7 \text{ zajcev} & \ldots & 9 \text{ dni} \\ 3 \text{ zajci} & \ldots & x \text{ dni.} \end{array}$$

Iz tega sledi, da je

$$x = \frac{7 \cdot 9}{3} = 21.$$

Torej bi trije zajci na travniku uživali 21 dni.

6. Tri tovorna vozila izpraznijo skladišče v dvanajstih urah. V kolikem času bi isto skladišče izpraznilo šest tovornih vozil?

Rešitev. V nalogi nastopata dve spremenljivki: tovorno vozilo in čas (ure). Več tovornih vozil potrebuje manj časa za izpraznitev skladišča. Torej sta spremenljivki v obratnem sorazmerju. Naj bo x iskana količina (ure). Torej je

$$\begin{array}{rcl} 3 \text{ tovorna vozila} & \ldots & 12 \text{ ur} \\ 6 \text{ tovornih vozil} & \ldots & x \text{ ur} \end{array}$$

Iz tega sledi, da je

$$x = \frac{3 \cdot 12}{6} = 6.$$

Šest tovornih vozil izprazni isto skladišče v šestih urah.

7. (a) Koliko je 71% od 30?
   (b) 43 je 62% katerega števila?
   (c) 50 je koliko procentov števila 15?

Rešitev.

(a) Ker poznamo procent in celoto, lahko poiščemo del:

$$0,71 \cdot 30 = 21,3.$$

(b) Naj bo x iskano število (celota). Potem je $0,62 \cdot x = 43$. Torej je $x = 69,35$.

(c) Označimo z x iskani procent. Potem je $x \cdot 15 = 50$. Torej je odgovor približno $3,33\%$.

8. Na izpitu je Andrej odgovoril na 75% vprašanj pravilno. Če je odgovoril na 90 vprašanj pravilno, koliko vprašanj je bilo na testu?

Rešitev. Označimo z x število vprašanj na testu. Potem je $75\% \cdot x = 90$. Sledi, da je $x = 120$.

9. V seriji 7500 izdelkov je 420 izdelkov z napako. Koliko procentov je to?

   Rešitev. Označimo s p procentno mero, ki jo iščemo. Potem je

$$p\% \cdot 7500 = 420.$$

   Iz tega sledi, da je $5,6\%$ izdelkov z napako.

10. Cena blaga je 130 denarnih enot. Ob ponedeljkih je cena znižana za 25%. Kolikšna je cena blaga ob ponedeljkih?

    Rešitev. Najprej izračunajmo, koliko je 130% od 25. Vidimo, da je $0,25 \cdot 130 = 32,5$, kar pomeni, da se cena zniža za $32,5$ denarnih enot. Torej je ob ponedeljkih cena blaga $97,5$ denarnih enot.

11. V podjetju se je prodaja v letu 2009 povečala za 25% glede na leto 2008. Kolikšno je to povečanje, če so v podjetju prodali leta 2008 za 20500 denarnih enot blaga?

    Rešitev. Vidimo, da je

$$\begin{aligned} 20500 + 25\% \cdot 20500 &= 20500 + \frac{25}{100} \cdot 20500 \\ &= 1,25 \cdot 20500 \\ &= 25625. \end{aligned}$$

    V podjetju so leta 2009 prodali za 25625 denarnih enot blaga.

12. To leto je cena določenega blaga 90 denarnih enot, kar je 15% več kot lani. Kakšna je bila cena blaga lani?

    Rešitev. Vidimo, da je

$$115\% \cdot \text{stara cena} = \text{nova cena}.$$

    Torej je lani stalo blago $78,26$ denarnih enot.

13. V trgovini z oblačili je bil prvi teden popust 10%. Naslednji teden je bil popust za še 25%. Za koliko procentov se je znižala prvotna cena?

Rešitev. Označmo končno ceno z R, začetno ceno pa s P. Potem je

$$R = 0,75 \cdot (0,9 \cdot P) = 0,675 \cdot P.$$

To pomeni, da je R $67,5\%$ prvotne cene P. Zapisano drugače, prvotna cena se je znižala za $32,5\%$.

14. Blago se je v mesecu marcu podražilo za 15%, v mesecu aprilu pa pocenilo za 5%. Kolikšna je bila začetna cena blaga, če je cena blaga sedaj 437 denarnih enot?

Rešitev. Naj bo C začetna cena blaga. Blago je v mesecu marcu stalo

$$C + 0,15 \cdot C = 1,15 \cdot C.$$

V mesecu aprilu se je ta cena znižala za 5%, kar pomeni, da je

$$1,15 \cdot C - 0,05 \cdot 1,15 \cdot C = 0,95 \cdot 1,15 \cdot C = 1,0925 \cdot C.$$

Iz tega sledi, da je

$$1,0925 \cdot C = 437.$$

Začetna cena blaga C je znašala 400 denarnih enot.

15. Cena blaga se je povečala za 15%. Za koliko procentov se mora znižati nova cena, da bo enaka prvotni?

Rešitev. Označimo s C_1 prvotno ceno, s C_2 pa novo ceno. Potem velja

$$C_2 = 1,15 \cdot C_1.$$

Novo ceno moramo znižati za $p\%$, da dobimo prvotno ceno. Torej je

$$C_2(1 - p\%) = C_1.$$

Upoštevajmo, da je $C_2 = 1,15 \cdot C_1$., iz česar sledi

$$1,15 \cdot C_1(1 - p\%) = C_1.$$

Iz te enakosti dobimo $1,15 \cdot (1 - p\%) = 1$ in zato

$$p = 13\%.$$

Novo ceno moramo znižati za 13%.

16. V letih od 1990 do 2000 se je število prebivalcev določenega mesta zmanjšalo iz 73824 na 64596. Za koliko procentov se je število prebivalcev zmanjšalo?

Rešitev. Ker je $73824 - 64596 = 9228$, je

$$\frac{9228}{73824} \cdot 100 = 12,5\%.$$

17. Zmešati želimo dve vrsti kave. Cena kave, ki je prve kvalitete, je $1,5$ denarnih enot, cena kave druge kvalitete pa je $0,9$ denarnih enot. V kakšnem razmerju moramo zmešati obe vrsti kave, da bo cena mešanice 1 denarna enota?

Rešitev. Naj bo x količina kave prve kvalitete kave in y količina druge kvalitete kave pred mešanjem. Vrednost prve kave pred mešanjem je $x \cdot 1,5$, vrednost druge kave pred mešanjem pa $y \cdot 0,9$. Vrednost mešanice je $(x + y) \cdot 2$. Torej je

$$x \cdot 1,5 + y \cdot 0,9 = (x + y) \cdot 1.$$

Iz tega sledi, da je

$$(1,5 - 1) \cdot x = (1 - 0,9) \cdot y$$

oziroma

$$0,5 \cdot x = 0,1 \cdot y.$$

Iskano razmerje je

$$x : y = 1 : 5.$$

18. Koliko procentov alkohola dobimo, če zmešamo 5 litrov 4% alkohola, 7 litrov 5% alkohola in 10 litrov 7% alkohola?

Rešitev. Zanima nas, koliko alkohola je v 22 litrih mešanice. Vemo, da je v prvi mešanici $4\% \cdot 5 = 0,2$ litrov alkohola, v drugi $5\% \cdot 7 = 0,35$ litrov alkohola in v tretji mešanici $7\% \cdot 10 = 0,7$ litrov alkohola. Torej je v 22 litrih mešanice $1,25$ litrov alkohola. Ker je

$$\frac{1,25}{22} \cdot 100 = 5,68\%,$$

je v 22 litrih mešanice $5,68\%$ alkohola.

19. Pri kuhanju žganja imamo na razpolago 6 litrov 60% žganja, 7 litrov 50% žganja in 11 litrov 40% žganja? Kako močno mešanico dobimo, če zmešamo vso žganje?

Rešitev. Zanima nas, koliko žganja je v 24 litrih mešanice. Vemo, da je v prvi mešanici $3,6$ litrov žganja, v drugi $3,5$ litrov žganja in v tretji mešanici $4,4$ litre žganja. Torej je v 24 litrih mešanice $11,5$ litrov žganja. Ker je

$$\frac{11,5}{24} \cdot 100 = 48\%,$$

je v 24 litrih mešanice 48% žganja.

Poglavje 2

Matrike

2.1 Računanje z matrikami

1. Podana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte

$$\frac{1}{5}(A + A^T).$$

Rešitev. Najprej zapišimo matriko A. Torej

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ker je $A = A^T$, je

$$A + A^T = A + A = 2A.$$

Iz tega sledi, da je

$$\frac{1}{5}(A + A^T) = \frac{2}{5}A.$$

2. Podani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte produkt AB in BA. Ali matriki komutirata?

Rešitev. Produkt matrik je:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriki ne komutirata, saj je $AB \neq BA$.

3. Podani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte produkt AB^T.

Rešitev. Ker je

$$B^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

je produkt

$$AB^T = \begin{bmatrix} 19 & -8 & -10 \\ 10 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -10 \end{bmatrix}.$$

4. Podani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte $(3A - B^T)^2$.

Rešitev. Ker je

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

je

$$3A - B^T = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -14 \\ 10 & 1 & -3 \\ -6 & 16 & 4 \end{bmatrix}.$$

Iz tega sledi, da je

$$(3A - B^T)^2 = \begin{bmatrix} 100 & -224 & 0 \\ -12 & -47 & -155 \\ 160 & 80 & 52 \end{bmatrix}.$$

5. Naj bosta A in B matriki velikosti 2×2. Pokažite, da je $(A+B)^T = A^T + B^T$.

Rešitev. Ker sta

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix},$$

je

$$\begin{aligned} (A+B)^T &= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} A^T + B^T &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{21}+b_{21} \\ a_{12}+b_{12} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Iz tega sledi, da je $(A+B)^T = A^T + B^T$.

6. Naj bosta A in B matriki velikosti 2×2. Pokažite, da je $(AB)^T = B^T A^T$.

Rešitev. Ker sta

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix},$$

je

$$\begin{aligned} (AB)^T &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} B^T A^T &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \\ a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Iz tega sledi, da je $(AB)^T = B^T A^T$.

7. Naj bo A kvadratna matrika. Pokažite, da lahko matriko A zapišemo kot vsoto simetrične matrike in poševno simetrične matrike.

Rešitev. Vidimo, da je

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Preverimo, da je $\frac{1}{2}(A + A^T)$ simetrična matrika:

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2}(A + A^T))^T &= \frac{1}{2}(A + A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T + (A^T)^T) \\ &= \frac{1}{2}(A^T + A) = \frac{1}{2}(A + A^T). \end{aligned}$$

Ker je $(\frac{1}{2}(A + A^T))^T = \frac{1}{2}(A + A^T)$, smo pokazali želeno. Preverimo še, da je $\frac{1}{2}(A - A^T)$ poševno simetrična matrika:

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2}(A - A^T))^T &= \frac{1}{2}(A - A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T - (A^T)^T) \\ &= \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T). \end{aligned}$$

Pokazali smo, da je $(\frac{1}{2}(A - A^T))^T = -\frac{1}{2}(A - A^T)$, kar pomeni, da je $\frac{1}{2}(A - A^T)$ poševno simetrična matrika.

8. Naj bo dana matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Zapišite matriko A kot vsoto simetrične in poševno simetrične matrike.

Rešitev. Pokazali smo, da lahko kvadratno matriko A zapišemo kot

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T),$$

kjer je $\frac{1}{2}(A + A^T)$ simetrična matrika, $\frac{1}{2}(A - A^T)$ pa poševno simetrična matrika. Torej moramo zapisati matriki $\frac{1}{2}(A + A^T)$ in $\frac{1}{2}(A - A^T)$. Ker je

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 7 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

je simetrična matrika

$$\frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 9 \\ -1 & 14 & -3 \\ 9 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

in poševno simetrična matrika

$$\frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. Naj bo dana matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte determinanto matrike A^2.

Rešitev. Ker je

$$A^2 = \begin{bmatrix} -41 & 7 \\ -12 & -38 \end{bmatrix},$$

je determinanta matrike A^2

$$\det A^2 = (-41) \cdot (-38) - (-12) \cdot 7 = 1642.$$

10. Naj bosta A in B kvadratni matriki velikosti 2×2. Pokažite, da je $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

Rešitev. Ker sta

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix},$$

je

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}) \\ & \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) \\ & \quad -(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) \\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{21}b_{12} - a_{21}a_{12}b_{11}b_{22} + a_{21}a_{12}b_{21}b_{12} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} (\det A)(\det B) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}) \\ &= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} - a_{11}a_{22}b_{21}b_{12} - a_{21}a_{12}b_{11}b_{22} + a_{21}a_{12}b_{21}b_{12}. \end{aligned}$$

Iz tega sledi, da je $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

11. Naj bo A kvadratna matrika velikosti 3×3. Pokažite, da je $\det A = \det A^T$.

Rešitev. Ker je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix},$$

ni težko preveriti, da je

$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$

in

$\det A^T = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$.

S tem smo pokazali želeno.

12. Podani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 7 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Izračunajte determinanto matrike BA.

Rešitev. Najprej izračunamo

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 14 & 3 \\ -9 & 14 & -5 \\ -12 & 63 & -31 \end{bmatrix}.$$

Determinanta matrike BA je -4263.

13. Podana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte A^{-1}.

Rešitev. Izračunamo, da je determinanta matrike A enaka 4 in

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Iz tega sledi, da je obratna matrika matrike A

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ni težko preveriti, da je $A^{-1}A = I$ in $AA^{-1} = I$.

14. Podana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \\ -4 & 9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte A^{-1}.

Rešitev. Obratna matrika matrike A je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{19} & \frac{5}{19} & -\frac{3}{19} \\ -\frac{8}{171} & \frac{20}{171} & \frac{7}{171} \\ \frac{37}{171} & -\frac{7}{171} & -\frac{11}{171} \end{bmatrix}.$$

15. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rešite matrično enačbo $AX = B$.

Rešitev. Matrično enačbo $AX = B$ množimo z leve strani z matriko A^{-1}. Torej je:

$$\begin{aligned} A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ IX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B. \end{aligned}$$

Pri tem je I identična matrika.

Ker je $X = A^{-1}B$, moramo najprej poiskati matriko A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

Torej je

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{14} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}.$$

16. Podani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešite matrično enačbno $XA = B$.

Rešitev. Matrično enačbo $XA = B$ pomnožimo z desne strani z matriko A^{-1}. Torej je $X = BA^{-1}$. Ker je

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 2 \end{bmatrix},$$

je

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{11}{8} & -\frac{31}{8} & -\frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{15}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

17. Podani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -4 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešite matrično enačbo $XA + 2X = B$.

Rešitev. Najprej bomo matrično enačbo $XA+2X = B$ zapisali drugače:

$$X(A+2I) = B.$$

Sedaj bomo množli pravkar zapisano matrično enačbo z desne strani z matriko $(A+2I)^{-1}$. Torej je:

$$\begin{aligned} X(A+2I)(A+2I)^{-1} &= B(A+2I)^{-1} \\ XI &= B(A+2I)^{-1} \\ X &= B(A+2I)^{-1}. \end{aligned}$$

Vidimo, da moramo najprej zapisati matriko $A+2I$:

$$A+2I = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Naslednji korak je zapisati matriko $(A+2I)^{-1}$:

$$(A+2I)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{24} & -\frac{17}{24} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}.$$

Sedaj lahko zapišemo iskano matriko X:

$$X = B(A+2I)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{8} & -\frac{19}{8} & \frac{15}{4} \end{bmatrix}.$$

18. Podani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 9 & 0 & -2 \\ -5 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Rešite matrično enačbo $2AX = 3B^T + 5X$.

Rešitev. Najprej bomo matrično enačbo $2AX = 3B^T + 5X$ zapisali drugače:

$$(2A-5I)X = 3B^T$$

Pomnožimo pravkar zapisano matrično enačbo z leve strani z matriko $(2A+5I)^{-1}$. Torej je:

$$X = (2A+5I)^{-1}3B^T.$$

Ker je

$$(2A+5I)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{1045} & \frac{74}{1045} & \frac{6}{209} \\ \frac{122}{1045} & -\frac{29}{1045} & -\frac{8}{209} \\ -\frac{94}{1045} & \frac{108}{1045} & \frac{37}{209} \end{bmatrix},$$

je rezultat

$$X = \begin{bmatrix} \frac{18}{15} & \frac{195}{209} & \frac{1764}{1045} \\ -\frac{18}{5} & -\frac{51}{209} & -\frac{2979}{1045} \\ -\frac{36}{5} & \frac{471}{209} & \frac{7743}{1045} \end{bmatrix}.$$

2.2 Sistemi linearnih enačb

1. Rešite sistem enačb

$$\begin{aligned} x+y-2z &= 2 \\ -2x+2y &= 1 \\ -x-y+3z &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev. Sistem bomo rešili s pomočjo Gaussove eliminacije. Najprej zapišimo razširjeno matriko sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Pomnožimo prvo vrstico s številom 2 in jo prištejmo drugi vrstici:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 5 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Tretji vrstici prištejmo prvo vrstico:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Rešitve sistema dobimo tako, da zaporedoma rešujemo enačbe, ki ustrezajo vrsticam od spodaj navzgor. Torej, iz tretje vrstice dobimo

$$z = 2.$$

Vrednost spremenljivke y dobimo iz druge vrstice

$$4y - 4z = 5.$$

Če upoštevamo vrednost spremenljivke z, sledi $y = \frac{13}{4}$. Vrednost spremenljivke x pa dobimo iz prve vrstice

$$x + y - 2z = 2.$$

S pomočjo dobljenih rezultatov lahko izračunamo, da je $x = \frac{11}{4}$.

2. Rešite sistem enačb

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 5 \\ -2x + 2y + 2z &= 1 \\ 5x - y + z &= 3. \end{aligned}$$

Rešitev. Rešitev sistema je

$$x = \frac{7}{8}, \quad y = \frac{11}{8}, \quad z = 0.$$

3. Rešite sistem enačb

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 7 \\ -5x + y - 2z &= 0 \\ 10x - 2y + 4z &= 6. \end{aligned}$$

Rešitev. Sistem nima rešitve.

4. Rešite sistem enačb

$$\begin{aligned} 4x - 2y + z &= 1 \\ -x + y - 2z &= 5 \\ -8x + 4y - 2z &= -2. \end{aligned}$$

Rešitev. Rešitev sistema je

$$x = \frac{3}{2}z + \frac{11}{2}, \quad y = \frac{7}{2}z + \frac{21}{2}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

5. Rešite sistem enačb

$$\begin{aligned} x + y + 3z + q &= 2 \\ -5x + z - 2q &= 1 \\ 3y + 2z - q &= 0 \\ -x + 3z &= 3. \end{aligned}$$

Rešitev. Rešitev sistema je

$$x = \frac{1}{4}, \quad y = \frac{-11}{12}, \quad z = \frac{13}{12}, \quad q = \frac{-7}{12}.$$

6. Rešite sistem enačb

$$\begin{aligned} 3x + 7y + z - 2q &= 3 \\ -5x - y - 4z - 2q &= 5 \\ 3y + 9z - q &= 0 \\ -x + 3z + 5q &= 7. \end{aligned}$$

Rešitev. Rešitev sistema je

$$q = \frac{17}{13}, \quad x = -\frac{20}{13}, \quad y = \frac{59}{39}, \quad z = -\frac{14}{39}.$$

7. Rešite sistem enačb

$$\begin{aligned} 3x + 7y + z - 2q &= 7 \\ -5x - y - 4z - 7q &= 2 \\ 11x + 3y + 11z - q &= 5. \end{aligned}$$

Rešitev. Rešitev sistema je

$$q = \frac{19}{125}z - \frac{67}{125}, \quad x = \frac{99}{500} - \frac{543}{500}z, \quad y = \frac{183}{500}z + \frac{381}{500}.$$

Poglavje 3

Vektorji

3.1 Osnovne operacije z vektorji

1. V kartezičnem koordinatnem sistemu so dane točke $A\,(2,0,-1)\,,\ B\,(1,2,0)$ in $C\,(-2,3,0)$.

   (a) Zapišite krajevne vektorje točk $A,\ B$ in C.

   (b) Zapišite koordinate vektorjev $\overrightarrow{AB},\ \ \overrightarrow{BA}$ in $\overrightarrow{AC}$.

   (c) Izračunajte razdaljo med točkama A in B ter dolžino vektorja $\overrightarrow{AB}$.

   (d) Zapišite enotski vektor v smeri vektorja $\overrightarrow{AB}$.

   (e) Zapišite vektor dolžine 6 v smeri vektorja $\overrightarrow{AB}$.

Rešitev.

(a) Krajevni vektor točke A (oznaka $\overrightarrow{r_A}$) je vektor z začetno točko $O\,(0,0,0)$ in končno točko A. Njegove koordinate so enake koordinatam točke A:

$$\overrightarrow{r_A} = (2,0,-1)$$

$$\overrightarrow{r_B} = (1,2,0)$$

$$\overrightarrow{r_C} = (-2,3,0).$$

(b) Koordinate vektorja $\overrightarrow{AB}$ so razlike koordinat točke B (končna točka) in točke A (začetna točka):

$$\overrightarrow{AB} = (1-2, 2-0, 0-(-1)) = (-1, 2, 1).$$

Vektor $\overrightarrow{BA}$ kaže v nasprotno smer kot vektor $\overrightarrow{AB}$. Njegove koordinate so nasprotne koordinatam vektorja $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{BA} = (1, -2, -1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-4, 3, 1).$$

(c) Razdalja med točkama A in B je enaka dolžini daljice med točkama A in B (oznaka $|AB|$, izračunamo jo po Pitagorovem izreku), ta pa je enaka dolžini vektorja $\overrightarrow{AB}$ (oznaka $|AB|$):

$$|AB| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

(d) Enotski vektor v smeri vektorja $\overrightarrow{AB}$ (oznaka $e_{\overrightarrow{AB}}$) dobimo, če vektor $\overrightarrow{AB}$ delimo z njegovo dolžino:

$$e_{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1) = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}).$$

(e) Iskani vektor $\overrightarrow{v}$ dobimo, če enotski vektor v smeri vektorja $\overrightarrow{AB}$ množimo s 6:

$$\overrightarrow{v} = 6e_{\overrightarrow{AB}} = 6\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \left(-\frac{6}{\sqrt{6}}, \frac{12}{\sqrt{6}}, \frac{6}{\sqrt{6}}\right).$$

2. Dani so vektorji $\overrightarrow{a} = (1,0,2)\,,\ \overrightarrow{b} = (-2,3,1)$ in $\overrightarrow{c} = (0,2,-1)\,.$
   Izračunajte dolžino vektorja $2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$.

   Rešitev.

   Najprej izračunamo koordinate zapisanega vektorja, nato pa izračunamo še njegovo dolžino.

   - Vektorje seštevamo (odštevamo) in množimo s številom po koordinatah:
     $2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 2\,(1,0,2) - 3\,(-2,3,1) + (0,2,-1) = (8,-7,0).$

   - Dolžina vektorja (po Pitagorovem izreku):
     $\left|2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right| = \sqrt{(8)^2 + (-7)^2 + 0^2} = \sqrt{113}.$

3. Na osi y poiščite točko, ki je enako oddaljena od točk $A\,(2,1,0)$ in $B\,(-1,3,2)$.

   Rešitev.

   Koordinate neznane točke dobimo na sledeči način.

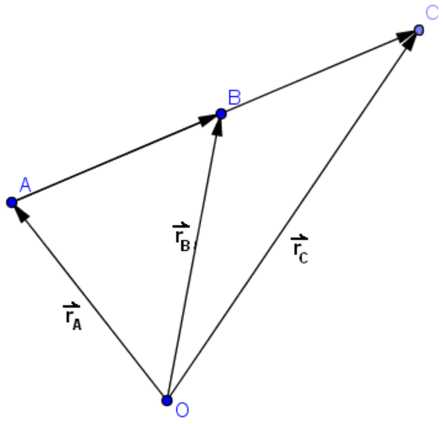
   - Iskano točko označimo z Y, njene koordinate so $Y\,(0,y,0)$ (ker leži na osi y).
   - Neznano prvo koordinato y dobimo iz pogoja $|AY| = |BY|$.
   - Vstavimo

     $$|AY| = \sqrt{(0-2)^2 + (y-1)^2 + (0-0)^2}$$
     $$|BY| = \sqrt{(0+1)^2 + (y-3)^2 + (0-2)^2}$$

     in dobimo (po kvadriranju)
     $4 + (y-1)^2 = 5 + (y-3)^2$ z rešitvijo $y = \frac{9}{4}$.

   - Iskana točka ima koordinate $Y\left(0, \frac{9}{4}, 0\right)$.

4. Dani sta točki $A\,(2,1,0)$ in $B\,(-1,3,2)$. Določite točko C tako, da bo točka B na razpolovišču daljice AC.



Slika 3.1: Naloga 4

Rešitev.

Koordinate točke A *(B)* so hkrati koordinate krajevnega vektorja $\overrightarrow{r_A}$ $(\overrightarrow{r_B})$.

$$\overrightarrow{r_C} = \overrightarrow{r_A} + 2\left(\overrightarrow{AB}\right) = (2,1,0) + 2\,(-3,2,2) = (-4,5,4).$$

5. Izračunajte obseg trikotnika z oglišči $A\,(2,1,-1)$, $B\,(-1,2,0)$ in $C\,(2,3,1)$.

Rešitev.

Obseg je vsota dolžin stranic $|AB| + |AC| + |BC|$.

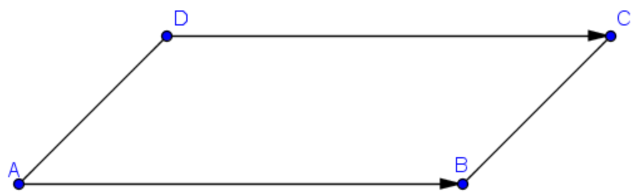
- Dolžine stranic so:

$$|AB| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{11}$$
$$|AC| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{8}$$
$$|BC| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{11}.$$

- Obseg trikotnika je enak: $\sqrt{11} + \sqrt{8} + \sqrt{11}$.

6. Dane so točke $A\,(2,1,-1)\,,\ B\,(-1,2,0)$ in $C\,(2,3,1)$.

   (a) Določite koordinate točke D tako, da bo $ABCD$ paralelogram.
   (b) Izračunajte obseg paralelograma.
   (c) Izračunajte dolžini diagonal tega paralelograma.



Slika 3.2: Naloga 6

Rešitev.

(a) Oglišča paralelograma označimo (ponavadi) po vrsti v pozitivni smeri (smeri nasprotni urinemu kazalcu) z A,B,C in D. Vidimo, da sta vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{DC}$ enaka (ista dolžina, ista smer). Iz tega pogoja dobimo enačbe za neznane koordinate točke $D\,(x,y,z)$.

   - Enaka vektorja $\overrightarrow{AB} = (-3,1,1)$ in $\overrightarrow{DC} = (2-x, 3-y, 1-z)$ imata enake koordinate: $-3 = 2-x, \quad 1 = 3-y, \quad 1 = 1-z$. $x = 5, \quad y = 2, \quad z = 0$,

$$\overrightarrow{DC} = (5,2,0)\,.$$

(b) Paralelogram ima paroma vzporedne in enako dolge stranice.

   - Obseg je torej: $2\,|AB| + 2\,|BC| = 2\left|\overrightarrow{AB}\right| + 2\left|\overrightarrow{BC}\right| = 2\sqrt{11} + 2\sqrt{11} = 4\sqrt{11}$.

   Paralelogram je romb.

(c) Izračunajmo sedaj še dolžini diagonal.

Opomba: Tako kot trikotnik lahko tudi paralelogram določimo z dvema nevzporednima vektorjema, ki ležita na nevzporednih stranicah paralelograma.

- Označimo vektor $\overrightarrow{AB}$ z $\overrightarrow{a}$, vektor $\overrightarrow{BC}$ pa z $\overrightarrow{b}$.

  $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} = (-3, 1, 1)$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{BC} = (0, 2, 2)$.

- Vektorja na diagonalah paralelograma sta $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (0, 2, 2)$ in $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = (-6, 0, 0)$.

- Njuni dolžini sta $\left|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\right| = \sqrt{8}$ in $\left|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}\right| = \sqrt{36}$.

3.2 Skalarni, vektorski in mešani produkt vektorjev

1. Izračunajte skalarni produkt vektorjev $\overrightarrow{a} = (1, 2, 0)$ in $\overrightarrow{b} = (-2, 3, 1)$.

   Rešitev.

   Skalarni produkt vektorjev je vsota produktov njunih istoležnih koordinat:

   $$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 4.$$

2. Dana sta vektorja $\overrightarrow{a} = (2, x, -3)$ in $\overrightarrow{b} = (x, 0, 4)$.
   Pri kateri vrednosti števila x sta vektorja pravokotna?

Rešitev.

Vektorja sta pravokotna, kadar je njun skalarni produkt enak 0.

- Izračunamo skalarni produkt: $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 2 \cdot x + x \cdot 0 + (-3) \cdot 4 = 2x - 12$.
- Zaradi pravokotnosti mora biti skalarni produkt enak 0, torej

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0, \quad 2x - 12 = 0$$
$$x = 6.$$

3. Izračunajte kot med vektorjema $\overrightarrow{a} = (2, -1, 3)$ in $\overrightarrow{b} = (6, -2, 1)$.

   Rešitev.

   Za izračun kota med vektorjema uporabimo enačbo $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi$, kjer je φ iskani kot.

   - Izračunamo $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = \frac{17}{\sqrt{574}} = 0,7$, od tod $\varphi = 45^\circ$.

4. Podana sta vektorja $\overrightarrow{a} = (2, 0, 1)$ in $\overrightarrow{b} = (\alpha, -1, 1)$.

   Določite parameter α tako, da bosta vektorja oklepala kot $60°$.

   Rešitev.

   Do iskanega parametra α pridemo na sledeči način:

   - Uporabimo enačbo $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \left|\overrightarrow{b}\right| \cos\varphi$.
   - Izračunamo $\cos\varphi = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.
   - Od tod velja: $\frac{1}{2} = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$.
   - Izračunamo sedaj $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 2\alpha + 1$ ter $|\overrightarrow{a}| \left|\overrightarrow{b}\right| = \sqrt{5} \cdot \sqrt{\alpha^2 + 2} = \sqrt{5\alpha^2 + 10}$.

- Dobljeno enačbo rešimo:

$$\frac{1}{2} = \frac{2\alpha + 1}{\sqrt{5\alpha^2 + 10}}$$

$$\sqrt{5\alpha^2 + 10} = 4\alpha + 2$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{520}}{22}.$$

- Rešitvi sta $\alpha_1 = 0,31$ in $\alpha_2 = -1,76$.

5. Podan je trikotnik z oglišči $A\,(3,2,-1)\,,\ B\,(0,1,2)$ in $C\,(1,2,3)$.

   (a) Izračunajte dolžino stranice AC.

   (b) Izračunajte višino na stranico AB.

   (c) Izračunajte kot $\measuredangle ABC$.

   (d) Določite vse notranje kote trikotnika $\triangle\ ABC$.

Rešitev.

(a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A} = (1,2,3) - (3,2,-1) = (-2,0,4)$,
$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{20}$.

(b) Pomagajmo si z enačbo

$$\sin\alpha \ = \frac{v}{\overline{AC}}.$$

- Izračunajmo sedaj kot α med vektorjema $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A} = (0,1,2) - (3,2,-1) = (-3,-1,3)$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A} = (1,2,3) - (3,2,-1) = (-2,0,4)$$

$$\cos\alpha \ = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{18}{\sqrt{19} \cdot \sqrt{20}} = \frac{18}{\sqrt{380}} = 0,923$$

$$\alpha = 22,63^\circ.$$

- Višina je enaka: $v = \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \sin\alpha \ = \sqrt{20} \cdot \sin 22,63^{^\circ} \ = 1,71.$

(c) Kot $\measuredangle ABC$ označimo z β.

$$\cos\beta \ = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{1}{\sqrt{19} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{57}} = 0,133$$

$$\beta = 82,33^{^\circ}.$$

(d) $\cos\beta \ = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{2}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{60}} = 0,258$

$$\gamma = 75,04^{^\circ}.$$

6. Izračunajte vektorski produkt vektorjev $\overrightarrow{a} = (2,1,-1)$ in $\overrightarrow{b} = (4,3,1)$.

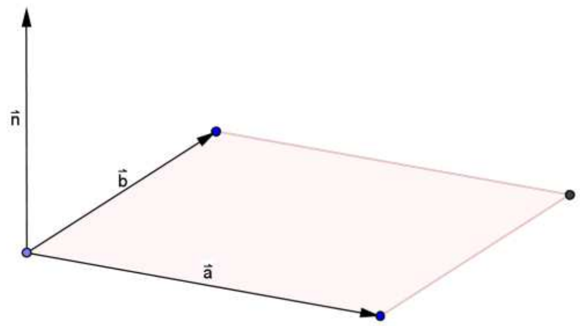
Rešitev.

Vektorski produkt vektorjev $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ je enak:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}\,(1-(-3)) - \overrightarrow{j}\,(2-(-4)) + \overrightarrow{k}\,(6-4)$$

$$= (4,-6,2)$$

Opomba: Vektorski produkt je vektor. Njegova dolžina je enaka ploščini paralelograma, določenega z vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$; njegova smer je pravokotna na ravnino vektorjev $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$ (smer desnega vijaka). Obe lastnosti bomo uporabili v naslednjih nalogah.



Slika 3.3: Naloga 6

7. Poiščite koordinate vektorja, ki je pravokoten na vektorja $\overrightarrow{a} = (2, 3, 1)$ in $\overrightarrow{b} = (-1, 2, 5)$. Izračunajte tudi njegovo dolžino.

   Rešitev.

   Koordinate iskanega vektorja poiščemo na sledeči način:

   - Izračunamo vektorski produkt: $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (13, -11, 7)$.
   - Dolžina vektorja je enaka: $\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = \sqrt{169 + 121 + 49} = \sqrt{339}$.

8. Izračunajte ploščino paralelograma, ki ga določata vektorja $\overrightarrow{a} = (2, 3, 1)$ in $\overrightarrow{b} = (1, 2, 3)$.

   Rešitev.

   Ploščino paralelograma izračunamo s pomočjo vektorskega produkta.

   - Vektorski produkt je enak: $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (7, -5, 1)$.
   - Izračunamo njegovo dolžino: $\left|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right| = \sqrt{49 + 25 + 1} = \sqrt{75}$.
   - Iskana ploščina paralelograma je enaka: $p = \sqrt{75}$.

9. Izračunajte ploščino trikotnika z oglišči $A\,(2,3,1)$, $B\,(4,0,-1)$ in $C\,(0,2,1)$ ter višino (v_c) tega trikotnika.

Rešitev.

Ploščina trikotnika je enaka polovici ploščine paralelograma, določenega z vektorjema $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2,4,-8)\,.$$

$$p = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{4+16+64} = \frac{\sqrt{74}}{2} = 4,58.$$

Višino iz oglišča C izračunamo z uporabo formule za izračun ploščine trikotnika: $p = \frac{1}{2}\left|AB\right| v_c$.

$$v_c = \frac{2p}{|AB|} = \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{84}{17}}.$$

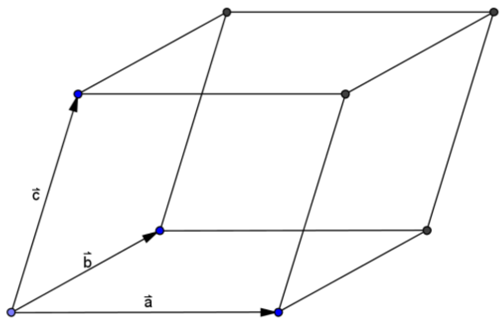
10. Izračunajte mešani produkt vektorjev $\overrightarrow{a} = (2,1,1)$, $\overrightarrow{b} = (-1,2,3)$ in $\overrightarrow{c} = (-3,2,1)$.

Rešitev.

Mešani produkt je enak:

$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\,(2-6) - 1\,(-1+9) + 1\,(-2+6) = -12$$

Opomba: Mešani produkt treh vektorjev je skalar. Njegova absolutna vrednost je enaka volumnu paralelepipeda, določenega z vektorji $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$; predznak predstavlja orientacijo.



Slika 3.4: Naloga 10

11. Izračunajte volumen paralelpipeda z oglišči $A\,(2,3,1)\,,\ B\,(3,4,2)\,,$ $C\,(5,1,2)\,, D(4,4,3)$.

Rešitev.

Najprej zapišemo koordinate vektorjev, nato pa izračunamo še mešani produkt.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a} = (1,1,1)$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{b} = (3,-2,1)$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{c} = (2,1,2)$$

$$\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\,(-4-1) - 1\,(6-2) + 1\,(3+4) = -2$$

Volumen je enak absolutni vrednosti dobljenega skalarja. $V = 2$.

12. Ali so vektorji $\overrightarrow{a} = (3,-3,3)\,,\quad \overrightarrow{b} = (7,-3,2)$ in $\overrightarrow{c} = (3,-7,8)$ koplanarni?

Rešitev.

Če so trije vektorji koplanarni (to je, ležijo v isti ravnini), določajo paralelepiped volumna 0. Torej je njihov mešani produkt enak vrednosti 0.

- Izračunamo mešani produkt:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 7 & -3 & 2 \\ 3 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 3\,(-10) - 3\,(-50) + 3\,(-40) = 0.$$

- Mešani produkt je enak 0, dani vektorji so koplanarni.

13. Izračunajte volumen tetraedra z oglišči $A\,(1,3,1)$, $B\,(0,4,2)$, $C\,(2,1,2)$ in $D(4,1,3)$.

Rešitev.
Volumen tetraedra izračunamo s pomočjo volumna paralelpipeda.

- Najprej poiščemo vektorje na stranicah paralelpipeda, ki izhajajo iz enega od oglišč, na primer iz oglišča A:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \vec{a} = (-1,1,1) \\ \overrightarrow{AC} &= \vec{b} = (1,-2,1) \\ \overrightarrow{AD} &= \vec{c} = (3,-2,2). \end{aligned}$$

- Izračunamo mešani produkt:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -1\,(-2) + 1\,(1) + 1\,(4) = 7.$$

- Volumen paralelepipeda, določenega z vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ je enak

$$\left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right| = 7.$$

- Iz geometrije vemo, da je volumen tetraedra je enak šestini volumna paralelepipeda, določenega z vektorji $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{AD}$:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right| = \frac{7}{6}.$$

3.3 Linearna kombinacija vektorjev

1. Izrazite vektor $\overrightarrow{d} = (6,8,-4)$ z vektorji $\overrightarrow{a} = (1,0,-2)$, $\overrightarrow{b} = (2,1,3)$ in $\overrightarrow{c} = (1,-1,-3)$

   Rešitev.

   Izraziti $\overrightarrow{d}$ z vektorji $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$ pomeni zapisati $\overrightarrow{d}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$:

   $$\overrightarrow{d} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c}.$$

   Iščemo α, β, γ.

   - Zapišemo to enakost v koordinatah

     $$(6,8,-4) = \alpha\,(1,0,-2) + \beta\,(2,1,3) + \gamma\,(1,-1,-3)\,.$$

     in dobimo sistem enačb

     $$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & 6 \\ & & \beta & - & \gamma & = & 8 \\ -2\alpha & + & 3\beta & - & 3\gamma & = & -4 \end{array}$$

     z rešitvijo $\alpha = 14, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -8.$

   - Vektor $\overrightarrow{d}$ zapisan z vektorji $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$: $\overrightarrow{d} = 14\overrightarrow{a} - 8\overrightarrow{c}$.

2. Ali so vektorji $\overrightarrow{a} = (0,1,3)$ $\overrightarrow{b} = (2,0,1)$ in $\overrightarrow{c} = (1,1,0)$ linearno neodvisni?

   Rešitev.

   Preverimo, če so vektorji linearni odvisni. Ali lahko kakega izmed njih izrazimo, kot linerno kombinacijo ostalih dveh vektorjev?

- Poskusimo izrazit vektor $\overrightarrow{a}$ z vektorjema $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$:

$$\overrightarrow{a} = \beta \overrightarrow{b} + \gamma \overrightarrow{c}$$
$$(0,1,3) = \beta\,(2,0,1) + \gamma\,(1,1,0)\,.$$

- Dobimo sistem enačb:

$$\begin{array}{rcrcl} 2\beta & + & \gamma & = & 0 \\ & & \gamma & = & 1 \\ & & \beta & = & 3 \end{array}$$

,ki nima rešitve, saj prva enačba glede na drugi dve ne drži.

- To pomeni, da vektorji $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ in $\overrightarrow{c}$ niso linearno odvisni, torej so linearno neodvisni.

3. Podani so vektorji $\overrightarrow{a} = (1,0,2)\,,\ \overrightarrow{b} = (2,1,1)$ in $\overrightarrow{c} = (1,\varphi,0)$. Določite parameter φ tako, da bodo vektorji linearno odvisni.

Rešitev.

Vektorji so linearno odvisni takrat, ko lahko enega izmed njih izrazimo kot linearno kombinacijo ostalih dveh vektorjev.

- Poskusimo izrazit vektor $\overrightarrow{c}$ z vektorjema $\overrightarrow{a}$ in $\overrightarrow{b}$:

$$\overrightarrow{c} = \alpha \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b}$$
$$(1,\varphi,0) = \alpha\,(1,0,2) + \beta\,(2,1,1)\,.$$

- Dobimo sistem enačb:

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha & + & 2\beta & = & 1 \\ & & \beta & = & \varphi \\ 2\alpha & + & \beta & = & 0 \end{array}$$

z rešitvijo: $\alpha = -\frac{1}{3}, \quad \beta = \frac{2}{3}, \quad \varphi = \frac{2}{3}$.

- Vektor ima koordinate: $\overrightarrow{c} = \left(1, \frac{2}{3}, 0\right)$.

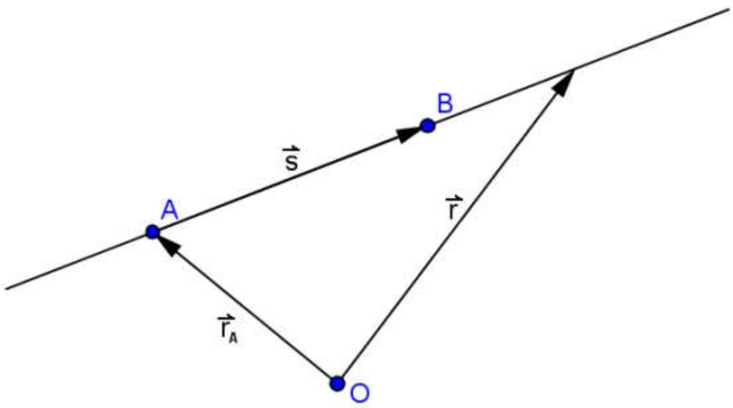
3.4 Premica in ravnina v prostoru

1. Zapišite vse tri oblike premice skozi točki $A\,(1,-2,0)$ in $B\,(2,3,1)$.

Rešitev.

(a) Enačbo zapišimo najprej v vektorski obliki.

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_A} + t\,\overrightarrow{s}$$



Slika 3.5: Naloga 1

- Izberemo krajevni vektor neke znane točke na premici (na primer točke A): $\overrightarrow{r_A} = (1,-2,0)$.

- Smerni vektor premice $\overrightarrow{s}$ je enak vektorju $\overrightarrow{AB}$, ki leži na premici:

$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{AB} = (1,5,1)\,.$$

- Krajevni vektor poljubne točke na premici $\overrightarrow{r}$ ustreza enačbi - vektorski obliki enačbe premice:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_A} + t\,\overrightarrow{s} = (1,-2,0) + t\,(1,5,1)\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Zapis po koordinatah (če so x,y,z koordinate vektorja $\overrightarrow{r}$) da parametrično obliko enačbe premice:

$$x = 1 + t$$
$$y = -2 + 5t$$
$$z = t,$$

(c) Eliminacija parametra t da kanonsko obliko enačbe premice:

- Iz prve enačbe: $t = x - 1$.
- Iz druge enačbe: $t = \frac{y+2}{5}$.
- Iz tretje enačbe: $t = z$.

$$x - 1 = \frac{y+2}{5} = z.$$

2. Zapišite enačbo premice, ki vsebuje točko $T\,(2, 1, -1)$ in je vzporedna vektorju $\overrightarrow{v} = (1, 3, -2)$.

Rešitev.

Smerni vektor iskane premice je enak danemu vektorju: $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{v}$.
Kot v prejšnji nalogi, dobimo:

- Vektorsko obliko:

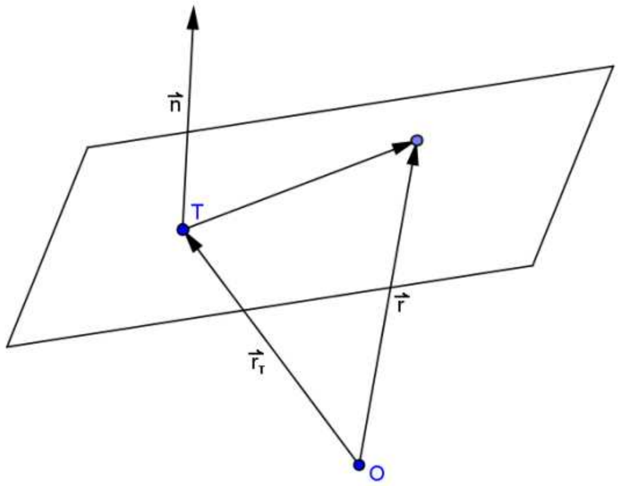
$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_T} + t\,\overrightarrow{s} = (2, 1, -1) + t\,(1, 3, -2)\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Parametrično obliko:

$$x = 2 + t$$
$$y = 1 + 3t$$
$$z = -1 - 2t.$$

- Kanonsko obliko: $x - 2 = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2}$.

3. Zapišite enačbo ravnine, ki vsebuje točko $T\,(2,-1,3)$ in je pravokotna na vektor $\overrightarrow{n}=(2,3,4)$. Slika(3.6).



Slika 3.6: Naloga 3

Rešitev.

Uporabimo enačbo $(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_T})\cdot\overrightarrow{n}=0$, če je $\overrightarrow{r}$ krajevni vektor poljubne točke na ravnini, $\overrightarrow{r_T}$ krajevni vektor dane točke na ravnini in $\overrightarrow{n}$ normalni vektor na ravnino:

$$(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_T})\cdot\overrightarrow{n}=((x,y,z)-(2,-1,3))\cdot(2,3,4)=$$

$$(x-2,y+1,z-3)\cdot(2,3,4)=0$$

in po izračunu

$$2x+3y+4z-13=0.$$

4. Zapišite enačbo ravnine, ki vsebuje točko $B\,(1,-2,4)$ in je vzporedna ravnini z enačbo $3x+y-6z=5$.

Rešitev.

Najprej iz dane enačbe ravnine razberemo koordinate vektorja normale.

- Ker sta ravnini vzporedni, je normala dane ravnine enaka normali iskane ravnine. $\overrightarrow{n}=(3,1,-6)$.

- Sedaj zapišemo enačbo iskane ravnine.

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r_B})\cdot\overrightarrow{n} &= ((x,y,z)-(1,-2,4))\cdot(3,1,-6)\\ &= (x-1,y+2,z-4)\cdot(3,1,-6)=0.\end{aligned}$$

  Po izračunu dobimo:

$$3x+y-6z+23=0.$$

5. Zapišite enačbo ravnine, ki vsebuje točko $C\,(1,4,-3)$ in je pravokotna na premico z enačbo $\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-2}{1}$.

Rešitev.

Enačbo zapisane premice preoblikujemo in razberemo smerni vektor.

- Ker je premica pravokotna na ravnino, kot tudi normala, je vektor normale enaka smernemu vektorju dane premice.

$$\overrightarrow{n}=\overrightarrow{s}=(2,-3,1)\,.$$

- Enačba iskane ravnine: $2x-3y+z+13=0$.

6. Zapišite enačbo ravnine, ki vsebuje točke $A(1,2,-1)$, $B(3,2,-1)$ in $C(0,3,2)$.

Rešitev.

Ravnino lahko opisemo s pomočjo dveh nekolinearnih vektorjev.

- Najprej zapišemo koordinate vektorjev $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$.
- Potrebujemo še normalo iskane ravnine - to je vektor, pravokoten na vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$, ki ležita v ravnini. Vektor, pravokoten na dva dana vektorja računamo z vektorskim produktom (glejte nalogo 12):
$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0,-6,2)\,.$$
- Enačba ravnine: $-6y + 2z + 14 = 0$.

7. Določite koordinate presečišča premice $\frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{2}$ in ravnine $3x - y + 2z = 12$.

Rešitev.

Koordinate presečišča dobimo na sledeči način:

- Enačbo premice zapišemo v parametrični obliki ter zapisemo koordinate:
$$x = 3t + 2$$
$$y = -2t - 3$$
$$z = 2t + 1.$$
- Koordinate nato vstavimo v enačbo ravnine (koordinate presečišča morajo ustrezati obema - enačbi premice in enačbi ravnine):
$$3(3t+2) - (-2t-3) + 2(2t+1) = 12.$$

- Iz gornje enačbe izračunamo vrednost parametra t: $t = \frac{1}{15}$.

- Izračunano vrednost parametra t vstavimo v (parametrično) enačbo premice in dobimo koordinate presečišča - točke P:

$$x = 3\frac{1}{15} + 2 = \frac{76}{15}$$

$$y = -2\frac{1}{15} - 3 = -\frac{76}{15}$$

$$z = 2\frac{1}{15} + 1 = \frac{46}{15}$$

$$P\left(\frac{76}{15}, -\frac{76}{15}, \frac{46}{15}\right).$$

Poglavje 4

Zaporedja in vrste

4.1 Zaporedja

1. Dano je aritmetično zaporedje : 3, 5, 7, 9,...

   (a) Zapišite prvi člen zaporedja, diferenco ter izračunajte 15. in 35. člen zaporedja.

   (b) Kateri člen danega zaporedja je enak 87?
   Izračunajte vsoto vseh členov, ki so manjši od njega.

   (c) Iz danega zaporedja izločimo vsak drugi člen (5, 9, 13, ..).
   Izračunajte 100. člen nastalega zaporedja.

   Rešitev.

   (a) Prvi člen zaporedja razberemo iz samega zaporedja.

   $$a_1 = 3.$$

   Po definiciji velja, da je razlika sosednjih členov aritmetičnega zaporedja konstantna.
   Diferenca zaporedja je enaka:

   $$a_{n+1} - a_n = d.$$

   $$5 - 3 = 2$$

   $$d = 2.$$

15. in 35. člen zaporedja poiščemo s pomočjo formule za izračun splošnega člena zaporedja.

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$
$$a_{15} = 3 + (15-1)\,2$$
$$a_{15} = 31.$$
$$a_{35} = 3 + (35-1)\,2$$
$$a_{35} = 71.$$

(b) Člen zaporedja, kateri ima vrednost 87, bomo poiskali s pomočjo formule za izračun splošnega člena zaporedja.

Vrednost člena poznamo, zanima nas vrednost neznanke n.

$$87 = 3 + (n-1)\,2$$
$$n = 43.$$

43. člen zaporedja ima vrednost 87.

Za izračun vsote prvih 42. členov aritmetičnega zaporedja uporabimo naslednjo formulo:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n\ .$$

Vsota prvih 42. členov je enaka:

$$S_{42} = \frac{3+85}{2} \cdot 42$$
$$S_{42} = 1848.$$

(c) Za izračun 100. člena novega zaporedja potrebujemo prvi člen zaporedja ter diferenco.

Prvi člen zaporedja je $a_1 = 3$.
Diferenca je enaka: $7 - 3 = d = 4$.

Splošni člen zaporedja je enak:

$$a_{100} = 3 + (100 - 1)\,4$$
$$a_{100} = 399.$$

2. Za kateri x je zaporedje s členi $x + 5, 25 - x, 30 + 2x$ aritmetično?

Rešitev.

Po definiciji velja, da je razlika sosednjih členov aritmetičnega zaporedja konstantna.

Najprej poiščemo diferenco zaporedja.

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Zapišemo enačbi:

$(25 - x) - (x + 5) = d => 20 - 2x = d$

$(30 + 2x) - (25 - x) = d => 5 + 3x = d.$

Diferenci zaporedja enačimo in izračunamo rešitev.

$$20 - 2x = 5 + 3x$$
$$15 = 5x$$
$$3 = x.$$

3. Sedmi člen aritmetičnega zaporedja je $\frac{17}{2}$, trinajsti člen pa $\frac{7}{2}$.

Izračunajte prvi člen in diferenco. Določite še deseti člen zaporedja.

Rešitev.

Prvi člen zaporedja poiščemo s pomočjo formule za izračun splošnega člena zaporedja.

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,d$$

Sedmi in trinajsti člen zapišemo:

$$a_7 = a_1 + (7-1)\,d \Rightarrow a_7 = a_1 + 6d \Rightarrow \frac{\frac{17}{2}-a_1}{6} = d$$
$$a_{13} = a_1 + (13-1)\,d \Rightarrow a_{13} = a_1 + 12d \Rightarrow \frac{\frac{7}{2}-a_1}{12} = d.$$

Diferenci enačimo, ter izračunamo prvi člen zaporedja.

$$\frac{\frac{17}{2}-a_1}{6} = \frac{\frac{7}{2}-a_1}{12}$$
$$\frac{27}{2} = a_1, \qquad -\frac{5}{6} = d.$$

Zapišimo sedaj še deseti člen zaporedja.

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$
$$a_{10} = \frac{27}{2} + (10-1)\left(-\frac{5}{6}\right)$$
$$a_{10} = 6.$$

4. 5. člen aritmetičnega zaporedja z diferenco $d = -2$ je polovica prvega člena. Izračunajte 10. člen zaporedja.

Rešitev.

5. člen zaporedja zapišemo s splošno formulo:

$$a_5 = a_1 + (5-1)\,(-2)$$
$$a_5 = a_1 - 8.$$

Odnos med prvim in petim členom pa:

$$a_5 = \frac{a_1}{2}.$$

Enačbi združimo in razberemo vrednost prvega člena zaporedja:

$$\frac{a_1}{2} = a_1 - 8, \qquad a_1 = 16.$$

10. člen zaporedja je:

$$a_{10} = 16 + (10 - 1)(-2)$$

$$a_{10} = -2.$$

5. V aritmetičnem zaporedju 2, 6, 10, 14,... smo sešteli začetne člene in dobili vsoto 800. Koliko členov smo sešteli?

Rešitev.

Za izračun vsote prvih n členov aritmetičnega zaporedja uporabimo formulo:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n\ .$$

Iščemo vrednost n.

$$800 = \frac{2 + a_n}{2} \cdot n\ .$$

Splošni člen zaporedja zapišemo:

$$a_n = 2 + (n - 1)\,4$$

$$a_n = -2 + 4n.$$

Enačbi združimo in izračunamo vrednost n.

$$800 = \frac{2 + (-2 + 4n)}{2} \cdot n$$

$$\pm\sqrt{400} = n, \qquad 20 = n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Sešteli smo prvih dvajset členov zaporedja.

6. Izračunajte vrednost x iz enačbe: $5 + 12 + 19 + \cdots + 138 = x$.

Rešitev.

Izračunati moramo vsoto prvih nekaj členov aritmetičnega zaporedja.

Poiščimo najprej, kateri člen zaporedja ima vrednost 138.

$$138 = 5 + (n-1)\,7$$

$$n = 20, \qquad a_{20} = 138.$$

Izračunajmo sedaj vsoto prvih 20 členov aritmetičnega zaporedja.

$$S_{20} = \frac{5 + 138}{2} \cdot 20$$
$$S_{20} = 1430.$$

Vrednost x je enaka 1430.

7. V geometrijskem zaporedju $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$,... izračunajte količnik in deseti člen zaporedja.

Rešitev.

Po definiciji geometrijskega zaporedja je kvocient sosednjih členov konstanten.

Velja:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$$

Količnik je enak:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = q = \frac{3}{4}.$$

Deseti člen geometrijskega zaporedja izračunamo s pomočjo formule za izračun splošnega člena.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Deseti člen je enak:

$$a_{10} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10-1}$$

$$a_{10} = \frac{3^8}{2^7}.$$

8. Za kateri x je dano zaporedje $x, x+1, x-3$ geometrijsko?

Rešitev.

Po definiciji geometrijskega zaporedja je kvocient sosednjih členov konstanten.

Velja:

$$\frac{x+1}{x} = q \qquad in \qquad \frac{x-3}{x+1} = q.$$

Količnika enačimo ter razberemo vrednost neznanke x.

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x-3}{x+1}$$

$$x = -\frac{1}{5}.$$

Končen Zapis geometrijskega zaporedja:

$$-\frac{1}{5}, \ \frac{4}{5}, \ -\frac{16}{5}.$$

9. V geometrijskem zaporedju s količnikom 2 je peti člen enak 16.

Koliko členov je treba sešteti, da dobimo vsoto 255?

Rešitev.

Formula za izračun vsote prvih n členov geometrijskega zaporedja je enaka:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}, \quad če \ q \neq 1.$$

Zapišimo sedaj vsoto prvih nekaj členov, katerih vrednost je enaka 255.

$$255 = a_1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1}, \quad \check{c}e\ q \neq 1.$$

Iščemo vrednost neznanke n.

Izračunajmo še prvi člen zaporedja, če vemo, da je peti enak 16.

$$16 = a_1 \cdot 2^4$$

$$a_1 = 1.$$

Poiščimo sedaj vrednost n.

$$255 = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$$2^8 = 2^n, \qquad n = 8.$$

Sešteli smo 8. členov geometrijskega zaporedja.

10. Vsota prvih dveh členov geometrijskega zaporedja je 10, produkt prvih treh členov pa 216. Določite prvi člen in količnik.

Rešitev.

Izpišemo podatke:

$$a_1 + a_2 = 10$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 216$$

Po definiciji geometrijskega zaporedja velja:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$$

Od tod velja:

$${a_2}^2 = a_1 \cdot a_3.$$

Uporabimo sedaj drugi podatek ter poiščimo vrednost a_2.

$$a_2 \cdot {a_2}^2 = 216, \qquad a_2 = 6.$$

Vrednost prvega člena je enaka:

$$a_1 + 6 = 10, \qquad\qquad a_1 = 4.$$

Količnik q geometrijskega zaporedja je enak:

$$q = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

11. Med števili 3 in 1536 vrinemo 8 števil tako, da nastane končno geometrijsko zaporedje.

    Kolikšna je vsota vrinjenih členov?

Rešitev.

Najprej izpišemo vse podatke:

$$a_1 = 3.$$

Ker je 3 vrednost prvega člen zaporedja, nato pa bomo vrinli še 8. členov zaporedja sledi, da je 1536 vrednost 10. člena.

$$a_{10} = 1536.$$

Uporabimo sedaj formulo za izračun splošnega člena ter izračunajmo količnik zaporedja.

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9$$
$$1536 = 3 \cdot q^9$$
$$q = 2.$$

Izračunajmo sedaj še vsoto 8. členov geometrijskega podzaporedja s prvim členom $a_1 = 3$, ter količnikom $q = 2$.

Vsota prvih 8 členov geometrijskega zaporedja je enaka:

$$S_8 = 3 \cdot \frac{2^8 - 1}{2 - 1}$$
$$S_8 = 765.$$

12. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$.

   (a) Zapišite prvih 5 členov tega zaporedja.
   (b) Ali je dano zaporedje monotono (naraščajoče/padajoče)?
   (c) Ali je zaporedje omejeno?

Rešitev.

(a) Členi zaporedja so $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

(b) Če je razlika $a_{n+1} - a_n > 0$ je zaporedje strogo naraščajoče, če pa je razlika $a_{n+1} - a_n < 0$ pa strogo padajoče.

   Naše zaporedje je strogo padajoče ker velja $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0$ oziroma $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$.

(c) To zaporedje ima zgornjo mejo $\max(a_n)$=1 in natančno spodnjo mejo $\inf(a_n)$=0.

13. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = 1 + \frac{1}{n}$.

   (a) Obravnavajte zaporedje.
   (b) Izračunajte kater členi zaporedja ležijo v ε-okolici števila $s = 1$, če je $\varepsilon = 10^{-2}$.

Rešitev.

(a) Členi zaporedja so $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$
   To zaporedje ima zgornjo mejo $\max(a_n)$=2 in natančno spodnjo mejo $\inf(a_n)$=1.
   Zaporedje je strogo padajoče.

(b) Da izračunamo kateri členi zaporedja ležijo v ε-okolici s rešimo neenačbo:

$$|a_n - s| < \varepsilon$$

$$\left|1 + \frac{1}{n} - 1\right| < 10^{-2}, \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{100}, \qquad 100 < n.$$

V ε-okolici točke števila s ležijo torej vsi členi zaporedja od vključno 101. dalje.

14. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{n}{n+1}$.

(a) Obravnavajte zaporedje.

(b) Izračunajte kater členi zaporedja ležijo zunaj ε-okolice števila $s = 1$, če je $\varepsilon = 10^{-4}$.

Rešitev.

(a) Členi zaporedja so $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
To zaporedje ima natančno zgornjo mejo sup(a_n)=1 in spodnjo mejo min(a_n)=$\frac{1}{2}$.
Zaporedje je strogo naraščajoče.

(b) Da izračunamo kateri členi zaporedja ležijo zunaj ε-okolice števila s rešimo neenačbo:

$$|a_n - s| \geq \varepsilon$$

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| \geq 10^{-4}, \qquad \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{10000}$$

$$9999 \geq n.$$

Zunaj ε-okolice točke števila s ležijo torej vsi členi zaporedja do vključno 9999.

15. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{2+n}{n}$.

(a) Zapišite prvih 5 členov tega zaporedja.

(b) Ali je dano zaporedje monotono?

(c) Ali je zaporedje omejeno?

(d) Izračunajte limito zaporedja.

(e) Določite konvergentnost zaporedja.

Rešitev.

(a) Členi zaporedja so $3, 2, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \frac{7}{5}, \ldots$

(b) Če je razlika $a_{n+1} - a_n > 0$ je zaporedje strogo naraščajoče, če pa je razlika $a_{n+1} - a_n < 0$ pa strogo padajoče.

- Preverimo: $\frac{2+(n+1)}{(n+1)} - \frac{2+n}{n} = \frac{-2}{n(n+1)}$.

- Dobljeni količnik je pri vsakem naravnem n negativen (pozitivni imenovalec, negativni števec).

- Zaporedje je monotono, strogo padajoče.

(c) Zaporedje je omejeno. To zaporedje ima zgornjo mejo max(a_n)=3 in natančno spodnjo mejo inf(a_n)=1.

(d) Splošni člen zaporedja a_n preoblikujemo tako, da števec in imenovalec delimo z največjo potenco stevila n.

$$a_n = \frac{2+n}{n} = \frac{\frac{2+n}{n}}{\frac{n}{n}} = \frac{\frac{2}{n}+1}{1}.$$

Z uporabo znane limite ($\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$) izračunamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}+1}{1} = 1 \ .$$

(e) Če ima zaporedje limito pravimo, da je konvergentno.

- Prvi člen zaporedja je zgornja meja zaporedja:
  max(a_n)=3=a_1. Zgornja meja pripada zaporedju.

- Natančna spodnja meja je limita zaporedja
  ($\lim_{n\to\infty} a_n = 1$).
  Natančna spodnja meja ni člen zaporedja.(inf(a_n)=1.)

16. Dano je zaporedje $a_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$.

(a) Zapišite prvih 5 členov zaporedja.

(b) Ali je dano zaporedje monotono?

(c) Izračunajte limito zaporedja.

(d) Določite konvergentnost zaporedja.

Rešitev.

(a) Členi zaporedja so $\frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{27}{16}, \frac{81}{32}, \frac{243}{64}, \ldots$

(b) Če je razlika $a_{n+1} - a_n > 0$ je zaporedje strogo naraščajoče, če pa je razlika $a_{n+1} - a_n < 0$ pa strogo padajoče.

- Preverimo: $\frac{3^{n+1}}{2^{(n+1)+1}} - \frac{3^n}{2^{n+1}} = \frac{3^n}{2^{n+2}}$.

- Dobljeni količnik je pri vsakem naravnem n pozitiven (pozitiven imenovalec ter pozitiven števec).

- Zaporedje je monotono, strogo naraščajoče.

(c) Splošni člen zaporedja a_n preoblikujemo

$$a_n = \frac{3^n}{2^{n+1}} = \frac{3^n}{2^n \cdot 2} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{2} = \infty \ .$$

(d) Zaporedje ni konvergentno temveč divergentno. Je strogo naraščajoče, neomejeno, s spodnjo mejo $\min(a_n)=\frac{3}{4}$, ki je prvi člen zaporedja.

17. Dano je zaporedje $a_n = \frac{2}{(n-5)^2}$.

(a) Zapišite prvih pet členov zaporedja.

(b) Ali je dano zaporedje monotono?

(c) Izračunajte limito zaporedja.

(d) Določite konvergentnost zaporedja.

Rešitev.

(a) Členi zaporedja so $\frac{2}{4^2}, \frac{2}{3^2}, \frac{2}{2^2}, \frac{2}{1^2}, a_5$ ne obstaja,. . .

(b) Izračunajmo razliko $a_{n+1} - a_n$.

$$\frac{2}{\left((n+1)-5\right)^2} - \frac{2}{(n-5)^2} = \frac{-4n+18}{(n-4)^2\,(n-5)^2}.$$

- Imenovalec je pozitiven. Razlika je enaka predznaku števca.

Pri določenem členu zaporedja se predznak spremeni in postane zaporedje padajoče.

Preverimo pri katerem členu se to zgodi:

- $-4n + 18 > 0$, če $n < 4\frac{1}{2}$.

  Od prvega do 4 ($n < 4\frac{1}{2}$) člena velja $a_{n+1} - a_n > 0$, torej je zaporedje od prvega do (vključno) četrtega člena naraščajoče.

- $-4n + 18 < 0$, če $n > 4\frac{1}{2}$.

  Od petega $n > 4\frac{1}{2}$ člena naprej velja $a_{n+1} - a_n < 0$, torej je zaporedje od petega člena naprej padajoče.

  Opomba:
  Napačno je ugotavljati monotonost zaporedja na osnovi nekaj začetnih členov zaporedja. Za dano zaporedje bi po prvih štirih členih napačno sklepali, da je zaporedje naraščajoče.

(c) Splošni člen zaporedja a_n preoblikujemo

$$a_n = \frac{2}{(n-5)^2} = \frac{2}{n^2 - 10n + 25} = \frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{n^2-10n+25}{n^2}}.$$

Z uporabo znane limite ($\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$) izračunamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^2}}{1 - \frac{10}{n} + \frac{25}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0 \ .$$

(d) Zaporedje je konvergentno z natančno spodnjo mejo inf(a_n)=0 ter zgornjo mejo max(a_n)=2, ki je 4. člen zaporedja.

$$a_4 = \frac{2}{(4-5)^2} = 2.$$

18. Koliko členov zaporedja s splošnim členom $a_n = \frac{2+n}{n}$ leži na intervalu $[1.2, 1.75]$.

Rešitev.

Nalogo bomo rešili na sledeči način.

- Poiščemo tiste člene zaporedja, ki ustrezajo neenačbi

$$1.2 \leq a_n \leq 1.75.$$

- Rešitev sistema neenačb $1,2 \leq \frac{2+n}{n} \leq 1,75$ je: $2,66 \leq n \leq 10$.

- Naravna števila, ki ustrezajo rešitvi so 3,4,5,6,7,8,9,10.

- Členi $a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$, ležijo na danem intervalu.

19. Koliko členov zaporedja s splošnim členom $a_n = \frac{2n+3}{n^2}$ je večjih od 1.

Rešitev.

Poiščemo tiste člene zaporedja, ki ustrezajo neenačbi $a_n > 1$.

- Rešitev neenačbe je:

$$\frac{2n+3}{n^2} > 1$$

$$-1 < n < 3.$$

- Ker je $n \in \mathbb{N}$, sta ustrezni števili 1,2.
- Dva člena a_1 ter a_2 sta večja od 1.

20. Poiščite vse člene zaporedja $a_n = \frac{4n+2}{6n-3}$, ki ležijo v ϵ - okolici limite, če je $\epsilon = \frac{1}{6}$.

Rešitev.

Člene zaporedja, ki lezijo v ϵ - okolici limite izračunamo na sledeči način:

- Izračunamo limito zaporedja (oznaka a)

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+2}{6n-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{2}{n}}{6-\frac{3}{n}} = \frac{4}{6} \quad .$$

- Rešimo neenačbo

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{4n+2}{6n-3} - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{6}, \qquad \left|\frac{4}{6n-3}\right| < \frac{1}{6}.$$

- Izraz v absolutni vrednosti je zmeraj pozitiven, zato nadalje znak absolutne vrednosti izpustimo.

$$\frac{4}{6n-3} < \frac{1}{6},$$
$$4,5 < n.$$

- V dani okolici točke ležijo členi od vključno petega člena naprej.

21. Poiščite vse člene zaporedja $a_n = \frac{n^2+2}{2n^2-3}$, ki ležijo izven ϵ - okolice limite, če je $\epsilon = \frac{1}{30}$.

Rešitev.

Naloge se bomo lotili na sledeč način:

- Izračunamo limito zaporedja (oznaka a).

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{2n^2-3} = \frac{1}{2} \; .$$

- Rešimo neenačbo.

$$|a_n - a| \geq \varepsilon$$

$$\left|\frac{n^2+2}{2n^2-3} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{30}, \qquad \frac{7}{4n^2-6} \geq \frac{1}{30}$$

$$210 \geq 4n^2 - 6$$

$$216 \geq 4n^2$$

$$n^2 \leq \frac{216}{4} = 54$$

$$-7.43 \leq n \leq 7.43.$$

- Izven dane okolice limite leži prvih sedem členov zaporedja.

22. Ugotovite, ali je dano zaporedje konvergentno in izračunajte njegovo limito:

(a) $a_n = \frac{100}{n^2-3}$
(b) $a_n = \frac{-3}{\sqrt{n}}$
(c) $a_n = \frac{n^2+20-3n}{25-3n^2}$
(d) $a_n = \frac{2(3+n)^2}{n+6}$
(e) $a_n = \frac{\sqrt[3]{(n^2+2n)}}{3+n}$
(f) $a_n = \frac{n^2}{3+n} - \frac{n^2}{n-1}$
(g) $a_n = \sqrt{n^2+3} - n$
(h) $a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

Rešitev.

Upoštevajmo, da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

in

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0, \text{ če } |\alpha| < 1.$$

(a) $a_n = \frac{100}{n^2-3}$

Splošni člen preoblikujemo tako, da ulomek delimo z n^2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{100}{n^2-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{100}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} - \frac{3}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

(b) $a_n = \frac{-3}{\sqrt{n}}$

Splošni člen preoblikujemo tako, da ulomek delimo z $n^{\frac{1}{2}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-3}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{3}{n^{\frac{1}{2}}}}{\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}} = \frac{0}{1} = 0.$$

(c) $a_n = \frac{n^2+20-3n}{25-3n^2}$

Splošni člen preoblikujemo tako, da ulomek delimo z n^2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+20-3n}{25-3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{20}{n^2}-\frac{3n}{n^2}}{\frac{25}{n^2}-\frac{3n^2}{n^2}} = -\frac{1}{3}\ .$$

(d) $a_n = \frac{2(3+n)^2}{n+6}$

Splošni člen preoblikujemo tako, da ulomek delimo z n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+12n+18}{n+6} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2}{n}+\frac{12n}{n}+\frac{18}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{6}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+12}{1} = \infty\quad .$$

(e) $a_n = \frac{\sqrt[3]{(n^2+2n)}}{3+n}$

Splošni člen preoblikujemo tako, da ulomek delimo z n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{(n^2+2n)} : \sqrt[3]{n^3}}{(3+n):n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{(n^2+2n)}{n^3}}}{\frac{3}{n}+\frac{n}{n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}{\frac{3}{n}+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

(f) $a_n = \frac{n^2}{3+n} - \frac{n^2}{n-1}$

Splošni člen preoblikujemo tako, da ulomek delimo z n^2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n-1)-n^2(3+n)}{(3+n)(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-4n^2}{n^2+2n-3} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-4n^2}{n^2}}{\frac{n^2+2n-3}{n^2}} = -\frac{4}{1} = -4.$$

(g) $a_n = \sqrt{n^2+3} - n$

Splošni člen preoblikujemo tako, da ga najprej racionaliziramo, nato pa delimo z n.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)}{1\cdot\left(\sqrt{2n^2+3}+n\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(\sqrt{2n^2+3}+n\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}}{\frac{\left(\sqrt{2n^2+3}+n\right)}{n}} = 0$$

(h) $a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

Splošni člen preoblikujemo z uporabo znane lastnosti:
$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$,če $|\alpha| < 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 0\cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 0.$$

4.2 Vrste

1. Izračunajte vsoto vrste

$$\sum_{k=1}^{10} (3\,(k-1)+2).$$

Rešitev.

Vsoto vrste izračunamo na sledeči način.

- Zapišemo prvih nekaj členov zaporedja. Členi si sledijo (2,5,8,11,. . .). Razvidno je, da gre za aritmetično zaporedje.
- Sešteti moramo torej 10. členov aritmetičnega zaporedja s prvim členom
  $a_1 = (3\,(1-1)+2) = 2$, zadnjim členom $a_{10} = (3\,(10-1)+2) = 29$ in razliko (diferenco $d = 3$).
- Za vsoto prvih n členov aritmetičnega zaporedja uporabimo že znani obrazec:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}\,(a_1+a_n) = \frac{n}{2}\,(2a_1+(n-1)\,d)$$

  in dobimo

$$S_{10} = \frac{10}{2}\,(2+29) = \frac{310}{2} = 155.$$

2. Izračunajte vsoto vrste

$$\sum_{k=0}^{8} 2^{k-3}.$$

Rešitev.

Vsoto vrste izračunamo na sledeči način.

- Zapišemo prvih nekaj členov zaporedja.
  Členi si sledijo $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \ldots$
  Razvidno je, da gre za geometrijsko zaporedje.

- Sešteti moramo torej 9. členov geometrijskega zaporedja s prvim členom
  $a_1 = 2^{0-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$, zadnjim členom $a_8 = 2^{8-3} = 2^5 = 32$ in količnikom $q = 2$.

- Za vsoto prvih n členov geometrijskega zaporedja uporabimo že znani obrazec:
  $$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$
  in dobimo
  $$S_9 = a_1 \cdot \frac{q^9 - 1}{q - 1} = \frac{1}{8} \cdot \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = \frac{511}{8} = 63,875.$$

3. Izračunajte vsoto vrste
$$\sum_{k=2}^{10} \left(\frac{4(k+1)}{3} - \frac{2^k}{128} \right).$$

Rešitev.

Vsoto zapišemo kot

$$\sum_{k=2}^{10} \frac{4(k+1)}{3} - \sum_{k=2}^{10} \frac{2^k}{128}.$$

- Prva vsota predstavlja 9 členov aritmetičnega zaporedja s prvim členom
  $a_1 = \frac{4(2+1)}{3} = 4$ ter zadnjim členom $a_9 = \frac{4(10+1)}{3} = \frac{44}{3}$ in razliko $d = \frac{4}{3}$.
  Vsota je enaka: $S_9 = \frac{9}{2}\left(\frac{12}{3} + \frac{44}{3}\right) = 84$.

- Druga vsota pa predstavlja 9 členov geometrijskega zaporedja s prvim členom $a_1 = \frac{2^2}{128} = \frac{4}{128}$, zadnjim členom $a_9 = \frac{2^{10}}{128} = \frac{1024}{128}$ ter količnikom $q = 2$.

  Vsota je enaka

$$S_9 = a_1 \cdot \frac{q^9 - 1}{q - 1} = \frac{4}{128} \cdot \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = \frac{4 \cdot 511}{128} = 15,968.$$

- Razlika vsot je enaka:

$$\sum_{k=2}^{10} \frac{4(k+1)}{3} - \sum_{k=2}^{10} \frac{2^k}{128} = 84 - 15,968 = 68,032.$$

4. Izračunajte vsoto geometrijske vrste.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k+1}}$$

Opomba: če je zaporedje delnih vsot $\{S_n\}$ konvergentno, imenujemo limito $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ vsota ali vrednost vrste.

Če limita $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ ne obstaja pravimo, da je vrsta divergentna.

Rešitev.

Geometrijska vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1}$ je konvergentna, če je količnik zaporednih členov $|q| < 1$ $(-1 < q < 1)$; njena vsota je enaka:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Vsota vrste $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{k+1}}$ z $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = -\frac{1}{8}$ ter količnikom $q = -\frac{1}{2}$ je:

$$S = \frac{\frac{1}{4}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{6}.$$

5. Izračunajte vsoto geometrijske vrste.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2k+1}$$

Rešitev.

Vsota vrste $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{2k-1}$ z $a_1 = -\frac{2}{3}$, $a_2 = -\frac{8}{27}$ ter količnikom $q = \frac{4}{9}$ je:

$$S = \frac{-\frac{2}{3}}{1-\frac{4}{9}} = -1\frac{1}{5}.$$

6. Preverite ali je dana geometrijska vrsta konvergentna in izračunajte vsoto.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Rešitev.

$$a_1 = \frac{1}{1}, \quad a_2 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{16}$$

Ker je količnik $q = \frac{1}{4}$ po absolutni vrednosti manjši od $1(-1 < q < 1)$, je vrsta konvergentna, vsota pa je enaka

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

7. Ugotovite ali je dana vrsta konvergentna?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+3}$$

Rešitev.

Če je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentna, potem velja $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Preverimo za dano vrsto:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{2k+3} = \frac{1}{2} \ .$$

Vrsta ni konvergenta.

8. Z uporabo kvocientnega (D'Alembertovega) kriterija ugotovite ali so vrste konvergentne.

   (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+2}$

   (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{25^{k+1}}{k!}$

Rešitev.

Uporaba kvocientnega kriterija pri ugotavljanju konvergence vrst.

Izračunamo limito (oznaka L) dveh zaporednih členov vrste (če obstaja)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L$$

Če $L < 1$, vrsta konvergira

če $L > 1$, vrsta divergira

če $L = 1$, kvocientni kriterij ne da odgovora o konvergenci vrste

(a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+2}$$

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+1}{(k+1)^2+2}}{\frac{k}{k^2+2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^3+k^2+2k+2}{k^3+2k^2+3k} = 1.$$

Kvocientni kriterij ne da odgovora o konvergenci vrste.

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{25^{k+1}}{k!}$$

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{25^{(k+1)+1}}{(k+1)!}}{\frac{25^{k+1}}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{25}{k+1} = 0$$

Ker je $L < 1$, vrsta konvergira.

9. Z uporabo korenskega (Cauchyjevega) kriterija ugotovite, ali sta vrsti konvergentni:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2k-1}\right)^k$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(2k - \sqrt{1+4k^2}\right)^k$

Rešitev.

Uporaba korenskega kriterija pri ugotavljanju konvergence vrst.

Izračunamo limito (oznaka L) k-tega korena iz k-tega člena (če obstaja)

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L$$

če $L < 1$, vrsta konvergira

če $L > 1$, vrsta divergira

če $L = 1$, kvocientni kriterij ne da odgovora o konvergenci vrste

(a) Vidimo, da je

$$L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k}{2k-1}\right)^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2k-1} = \frac{1}{2}$$

Ker je $L < 1$, vrsta konvergira.

(b) Zapišimo:

$$L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(2k - \sqrt{1+4k^2}\right)^k} = \lim_{k\to\infty} 2k - \sqrt{1+4k^2} =$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2k - \sqrt{1+4k^2} \cdot \left(2k + \sqrt{1+4k^2}\right)}{2k + \sqrt{1+4k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{-1}{2k + \sqrt{1+4k^2}} = 0$$

Ker je $L < 1$, vrsta konvergira.

Poglavje 5

Realne funkcije

5.1 Osnove

1. Naj bo $f(x) = 5 + xe^{\frac{3}{x^2}}$. Izračunajte: $f(1)$, $f(0)$, $f(\sqrt{3})$, $f(3)$.

   Rešitev. Ni težko preveriti, da je

   $$\begin{aligned} f(1) &= 5 + 1 \cdot e^{\frac{3}{1^2}} = 5 + e^3 \\ f(\sqrt{3}) &= 5 + \sqrt{3}e^{\frac{3}{(\sqrt{3})^2}} = 5 + \sqrt{3}e^{\frac{3}{3}} \\ f(3) &= 5 + 3e^{\frac{3}{9}} = 5 + 3e^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

   V točki $x = 0$ funkcija f ni definirana.

2. Zapišite definicijsko območje funkcije:

   (a) $f(x) = x^5 + 7x^3 - 2x + 17$

   (b) $f(x) = \sqrt{x+9}$

   (c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 5}$

   (d) $f(x) = \frac{3+2x}{16-x^2}$

   (e) $f(x) = 4\ln(x^2 - 25)$

   (f) $f(x) = 2\arctan(1 - x^2)$

   (g) $f(x) = 5\ln(3 - \sqrt{2x+4})$

Rešitev.

(a) V tem primeru je $D_f = \mathbb{R}$.

(b) Ker mora biti $x + 9 \geq 0$, je $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -9\}$.

(c) Ker mora biti $x^2 + 6x + 5 = (x + 3)(x + 2) \geq 0$, je $D_f = (-\infty, -3] \cup [-2, \infty)$.

(d) Ker mora biti $16 - x^2 = (4 - x)(4 + x) \neq 0$, je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$.

(e) Ker mora biti $x^2 - 25 > 0$, je $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ in } x > 5\}$.

(f) V tem primeru je $D_f = \mathbb{R}$.

(g) Ker mora biti $3 - \sqrt{2x + 4} > 0$ in $2x + 4 \geq 0$, je $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2 \text{ in } x < \frac{5}{2}\}$.

3. Dani sta funkciji $f(x) = -5x + 2$ in $g(x) = 7x^2 + 4$. Zapišite funkcije:

(a) $(f + g)(x)$

(b) $(f \circ g)(x)$

(c) $(g \circ f)(x)$

Rešitev.

(a) $(f + g)(x) = g(x) + g(x) = -5x + 2 + 7x^2 + 4 = 7x^2 - 5x + 6$

(b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(7x^2 + 4) = -5(5x^2 + 3) + 2 = -25x^2 - 13$

(c) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(-5x + 2) = 7(-5x + 2)^2 + 4 = 7(25x^2 - 20x + 4) + 4 = 175x^2 - 140x + 28$

4. Ali so funkcije sode ali lihe?

(a) $f(x) = 6x^5 - 2x^3 + 7x$

(b) $f(x) = \frac{2x}{11x^2 - 3x - 1}$

(c) $f(x) = x^2 e^{3x^2}$

(d) $f(x) = x^7 e^{5x^2}$

Rešitev.

(a) Funkcija f je liha, saj je $f(-x) = -f(x)$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= 6(-x)^5 - 2(-x)^3 + 7(-x) \\ &= -6x^5 + 2x^3 - 7x \\ &= -(6x^5 - 2x^3 + 7x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

(b) Vidimo, da je

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{2(-x)}{11(-x)^2 - 3(-x) - 1} \\ &= \frac{-2x}{11x^2 + 3x - 1}. \end{aligned}$$

Funkcija f ni niti soda niti liha, saj $f(-x) \neq f(x)$ in $f(-x) \neq -f(x)$.

(c) Ni težko preveriti, da je

$$f(-x) = (-x)^2 e^{3(-x)^2} = x^2 e^{3x^2} = f(x).$$

Iz tega sledi, da je funkcija soda, saj je $f(-x) = f(x)$.

(d) Funkcija ni niti soda, niti liha.

5. Skicirajte graf funkcije:

(a) $f(x) = -3x + 4$

(b) $f(x) = -2x^2 + 3$

(c) $f(x) = x^2 + 5x + 6$

(d) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

(e) $f(x) = \sqrt{3x - 1}$

(f) $f(x) = e^{-(x+1)} + 1$

(g) $f(x) = 3e^{(x+2)} + 1$

(h) $f(x) = \ln(3x - 2)$

(i) $f(x) = -2\ln(5x - 1)$

(j) $f(x) = -2\sin(x - \frac{\pi}{3})$

(k) $f(x) = \cos(4x)$

(l) $f(x) = -3\sin(5x)$

Rešitev. Pri nalogi si lahko pomagamo z ničlami funkcije, definicijskim območjem, zalogo vrednosti itd. Upoštevamo lahko tudi naslednji zapis. Če poznamo graf funkcije, ki je podana s predpisom $f(x)$, dobimo graf funkcije, podane s predpisom

- $-f(x)$, z zrcaljenjem preko osi x
- $f(-x)$, z zrcaljenjem preko osi y
- $kf(x), (k > 0)$, z raztegom za faktor k po osi y
- $f(kx), (k > 0)$, z raztegom za faktor $1/k$ po osi x
- $f(x) + a$, s premikom po osi y za a
  - navzgor, če $a > 0$
  - navzdol, če $a < 0$
- $f(x + a)$, s premikom po osi x za a
  - v levo, če $a > 0$
  - v desno, če $a < 0$

Na ta način lahko postopoma pridemo do grafa želene funkcije.

(a) Graf funkcije je na sliki (5.1).

(b)
- Parabolo $y = x^2$ raztegnemo za faktor 2 po osi y (dobimo graf $y = 2x^2$).
- Dobljeni graf zrcalimo preko osi x (dobimo graf $y = -2x^2$).
- Dobljeni graf premaknemo za 3 navzgor (dobimo graf želene funkcije $f(x) = -2x^2 + 3$).

Graf je na sliki (5.2).

(c) Najprej zapišimo $f(x) = x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$. Torej sta ničli funkcije $x = -2$ in $x = -3$. Funkcija seka ordinato v $y = 6$. Teme funkcije je v točki $T(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4})$. Graf je na sliki (5.3).

(d) Hiperbolo $y = \frac{1}{x}$ premaknemo za 2 proti desni.
Graf je na sliki (5.4).

(e) Definicijsko območje funkcije $f(x)$ je $D_f = \{x \in \mathbb{R}\ ;\ x \geq \frac{1}{3}\}$, zaloga vrednosti je $Z_f = \mathbb{R}^+$. Graf funkcije je na sliki (5.5).

(f)
- Graf eksponentne funkcije $y = e^x$ zrcalimo preko osi y ($y = e^{-x}$),
- premaknemo za 1 proti levi ($y = e^{-(x+1)}$)
- in za 1 navzgor.

Graf je na sliki (5.6).

(g) Graf funkcije je na sliki (5.7).

(h) Dano funkcijo zapišimo kot $f(x) = \ln 3(x - \frac{2}{3})$.
- Po osi x jo skrčimo za faktor 3 ($y = \ln(3x)$)
- in premaknemo za $\frac{2}{3}$ v desno.

Graf je na sliki (5.8).

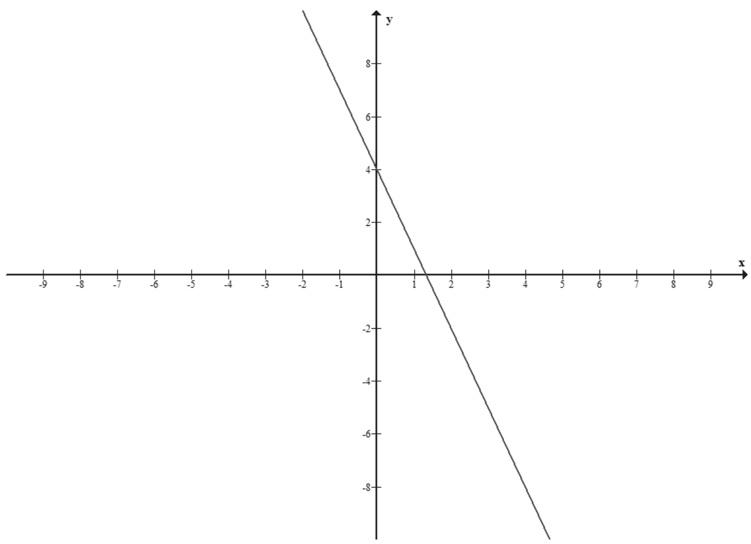
(i) Graf funkcije je na sliki (5.9).

(j)
- Graf funkcije $y = \sin x$ zrcalimo čez os x in raztegnemo za faktor 2 po osi y ($y = -2\sin x$),
- nato pa premaknemo za $\frac{\pi}{3}$ v desno.

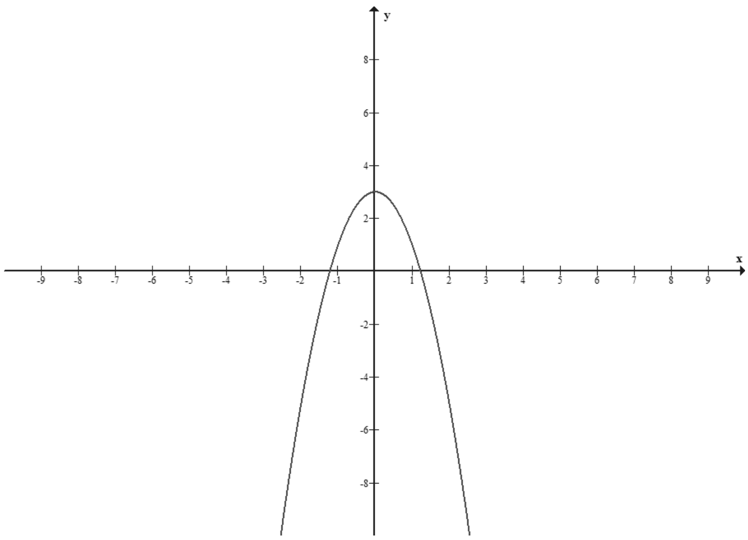
Graf je na sliki (5.10).

(k) Graf funkcije $y = \cos x$ skrčimo za faktor 4 po osi x.
Graf je na sliki (5.11).

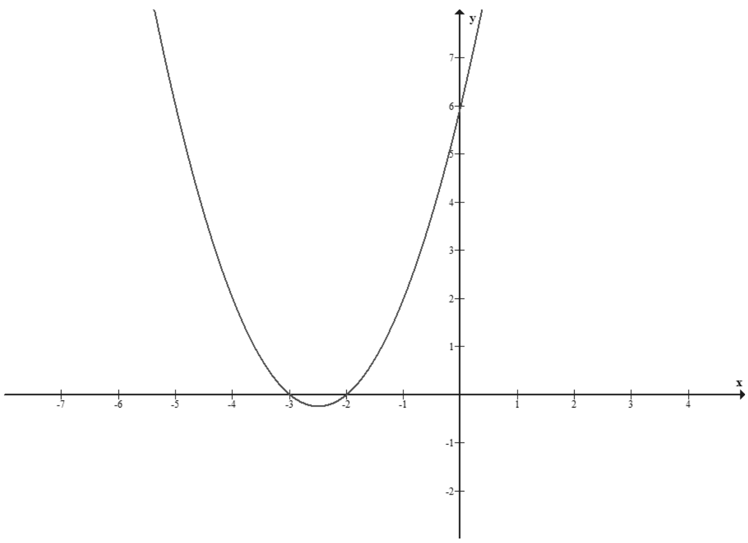
(l) Graf funkcije je na sliki (5.12).



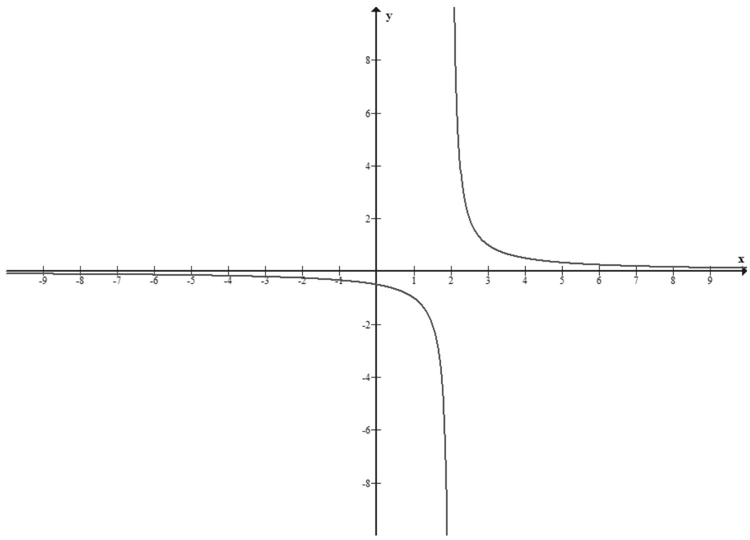
Slika 5.1: $f(x) = -3x + 4$



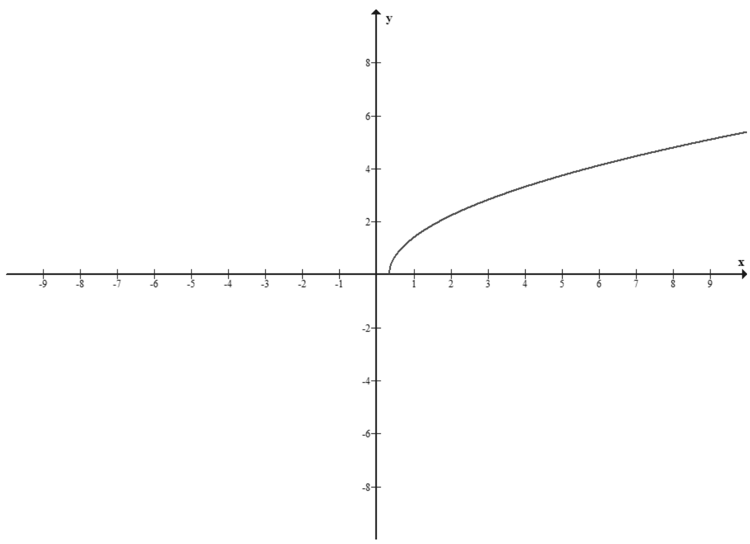
Slika 5.2: $f(x) = -2x^2 + 3$



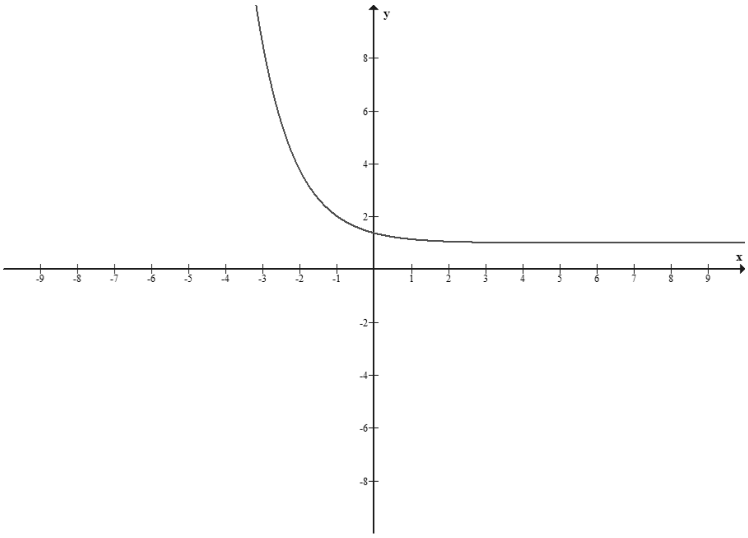
Slika 5.3: $f(x) = x^2 + 5x + 6$



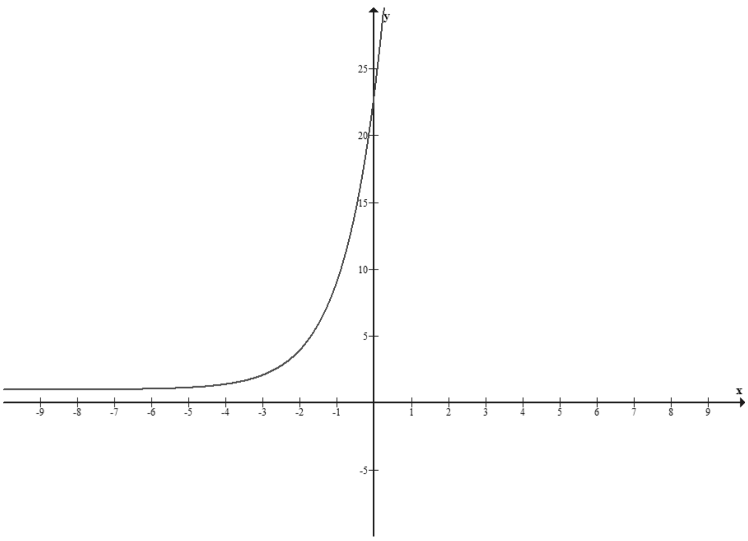
Slika 5.4: $f(x) = \frac{1}{x-2}$



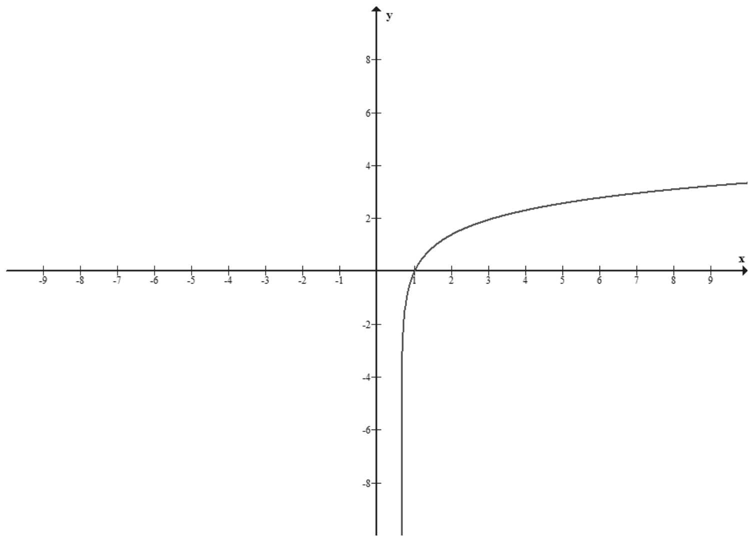
Slika 5.5: $f(x) = \sqrt{3x-1}$



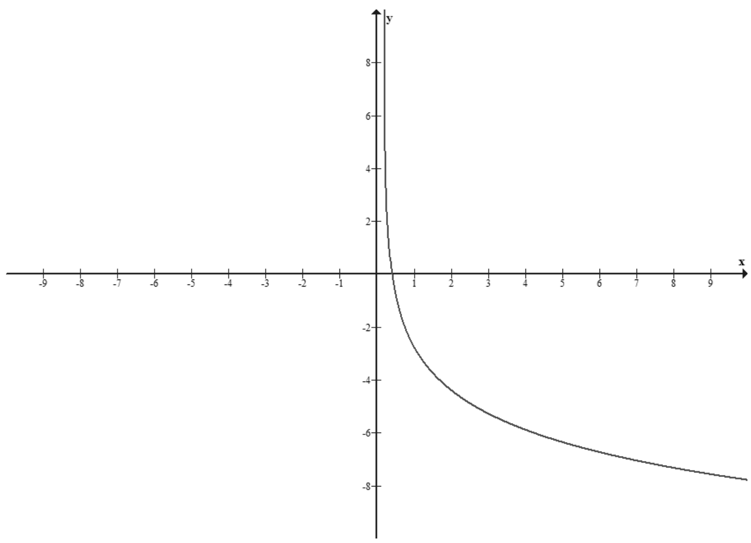
Slika 5.6: $f(x) = e^{-(x+1)} + 1$



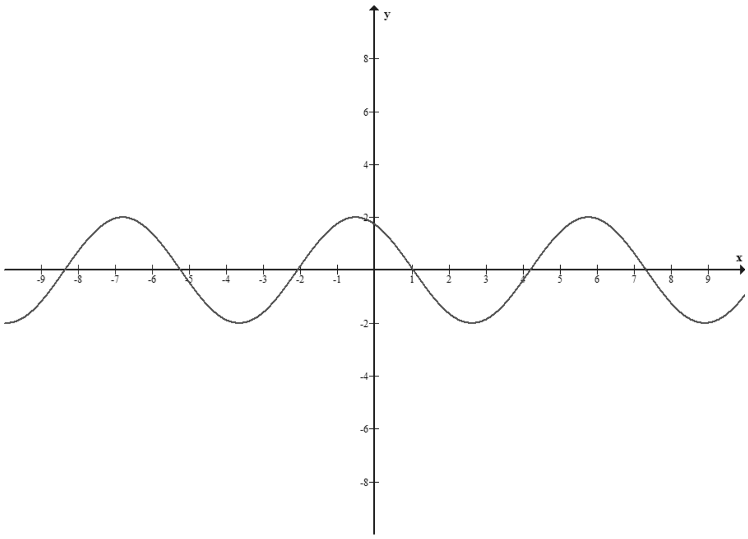
Slika 5.7: $f(x) = 3e^{x+2} + 1$



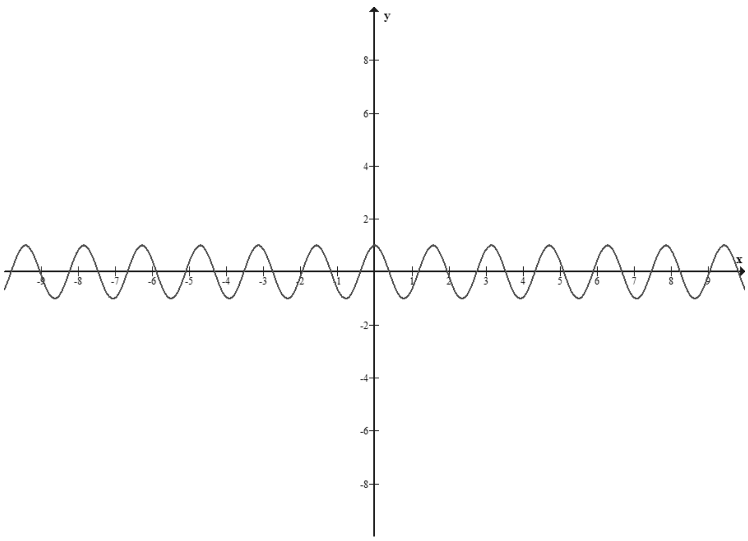
Slika 5.8: $f(x) = \ln(3x - 2)$



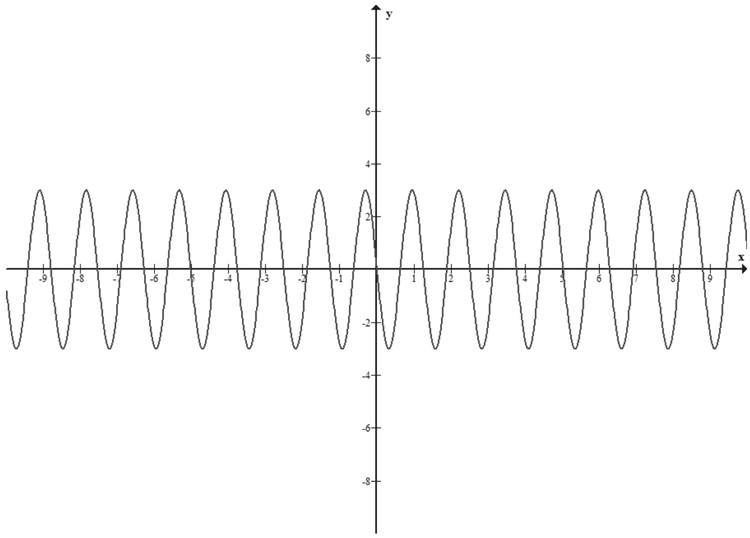
Slika 5.9: $f(x) = -2\ln(5x - 1)$



Slika 5.10: $f(x) = -2\sin(x - \frac{\pi}{3})$



Slika 5.11: $f(x) = \cos(4x)$



Slika 5.12: $f(x) = -3\sin(5x)$

6. Zapišite predpis inverzne funkcije dani funkciji:

   (a) $f(x) = x^3 + 7$
   (b) $f(x) = \ln(5x)$
   (c) $f(x) = 2e^{-x+2} + 2$

Rešitev.

(a) Do predpisa inverzne funkcije pridemo z naslednjimi koraki:
   - Funkcijo prepišemo v obliki $y = x^3 + 7$.
   - Zamenjamo spremenljivki x in y: $x = y^3 + 7$.
   - Rešitev enačbe da iskani predpis: $y = \sqrt[3]{x-7}$.

(b) Kot v prejšnjem primeru: $y = \ln(5x), \quad x = \ln(5y), \quad y = \frac{1}{5}e^x$

(c) $y = 2e^{-x+2} + 2, \quad x = 2e^{-y+2} + 2, \quad y = -\ln(\frac{x}{2} - 1) + 2$

5.2 Limita in zveznost

1. Izračunajte:

   (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-707x}{7x^2+707}$

   (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+50x-4}{-15x^2+2x+19}$

   (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2+2x-9}{x^5+2x^3-21}$

   (d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2^3}{3x^3-2x}$

   (e) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^7+4x^4+6x^2-x+22}{5x^7-6x^5+3x-7}$

   Rešitev.

   (a) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ računamo po enakih pravilih kot limito zaporedja, torej $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-707x}{7x^2+707} = \frac{1}{7}$.

   (b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+50x-4}{-3x^2+2x+19} = -\frac{1}{15}$.

   (c) $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^2+2x-9}{x^5+2x^3-21} = 0$.

   (d) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ računamo kot $\lim_{x\to\infty} f(-x)$. Torej je v danem primeru $\lim_{x\to\infty} \frac{-x^3+2^3}{-3x^3+2x} = \frac{1}{3}$.

   (e) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^7+4x^4+6x^2-x+22}{5x^7-6x^5+3x-7} = \frac{3}{5}$.

2. Izračunajte:

   (a) $\lim_{x\to3} \frac{x^2-9}{x-3}$

   (b) $\lim_{x\to2}(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8})$

   (c) $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{5x}$

   (d) $\lim_{x\to5} \frac{1-\sqrt{x-4}}{x^2-25}$

   (e) $\lim_{x\to4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

Rešitev. Limite so:

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} &= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}\\ &= \lim_{x\to 3}(x+3)=6\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}) &= \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{(x-2)(x^2+2x+4)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(c) Izraz $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{5x}$ razširimo s $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{5x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{5x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{5x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2}{5(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

(d) Racionaliziramo števec in upoštevamo zvezo $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}\frac{1-\sqrt{x-4}}{x^2-25} &= \lim_{x\to 5}\frac{(1-\sqrt{x-4})(1+\sqrt{x-4})}{(x^2-25)(1+\sqrt{x-4})}\\ &= \lim_{x\to 5}\frac{1-(x-4)}{(x^2-25)(1+\sqrt{x-4})}\\ &= \lim_{x\to 5}\frac{5-x}{(x-5)(x+5)(1+\sqrt{x-4})}\\ &= \lim_{x\to 5}\frac{-(x-5)}{(x-5)(x+5)(1+\sqrt{x-4})}\\ &= \lim_{x\to 5}\frac{-1}{(x+5)(1+\sqrt{x-4})}\\ &= -\frac{1}{20}\end{aligned}$$

(e) Racionaliziramo števec in imenovalec

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} &= \lim_{x\to 4}\frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}\cdot\frac{3+\sqrt{5+x}}{3+\sqrt{5+x}}\cdot\frac{1+\sqrt{5-x}}{1+\sqrt{5-x}} \\
&= \lim_{x\to 4}\frac{9-(5+x)}{1-(5-x)}\cdot\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}} \\
&= \lim_{x\to 4}\frac{4-x}{-4+x}\cdot\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}} \\
&= \lim_{x\to 4}(-1)\cdot\frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}} \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

3. Izračunajte:

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(6x)}{x}$

(b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(5x)}{3x^2}$

(c) $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(7x)}$

(d) $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$

(e) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{8x}$

Rešitev.

(a) Vidimo, da je
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(6x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin(6x)}{6x}.$$
Naj bo $6x=t$ in upoštevajmo, da je $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Potem je
$$\lim_{x\to 0}\frac{6\sin(6x)}{6x}=\lim_{t\to 0}\frac{6\sin t}{t}=6\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=6.$$

(b) Vidimo, da je
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(5x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{25\sin(5x)\sin(5x)}{25\cdot 3x^2}.$$
Naj bo $5x=t$. Potem je
$$\lim_{x\to 0}\frac{25\sin(5x)\sin(5x)}{25\cdot 3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{25\sin(t)\sin(t)}{3t^2}=\frac{25}{3}.$$

(c) Vidimo, da je
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(7x)}=2\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(7x)}=2\lim_{x\to 0}\frac{7x}{7\sin(7x)}.$$
Naj bo $7x=t$. Potem je
$$2\lim_{x\to 0}\frac{7x}{7\sin(7x)}=2\lim_{t\to 0}\frac{t}{7\sin t}=\frac{2}{7}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\frac{2}{7}.$$

(d) Vidimo, da je
$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{3}{3x}}.$$
Naj bo $3x=t$ in upoštevajmo, da je $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. Potem je
$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{3}{3x}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{3}{t}}=\lim_{t\to 0}((1+t)^{\frac{1}{t}})^3=e^3.$$

(e) Vidimo, da je
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{8x}=\frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}=\frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\frac{5\ln(1+5x)}{5x}.$$
Naj bo $5x=t$ in upoštevajmo, da je $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$. Potem je
$$\frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\frac{5\ln(1+5x)}{5x}=\frac{1}{8}\lim_{t\to 0}\frac{5\ln(1+t)}{t}=\frac{5}{8}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\frac{5}{8}.$$

4. Funkcija f je podana s predpisom

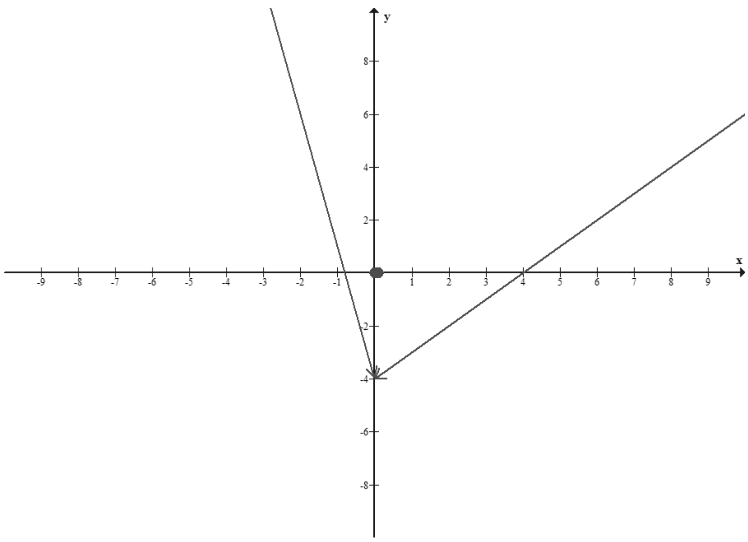
$$f(x) = \begin{cases} -5x - 4; & x < 0 \\ 0; & x = 0 \\ x - 4; & x > 0 \end{cases}$$

Izračunajte $f(0)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$. Ali je funkcija f zvezna v točki $x = 0$?

Rešitev. Očitno je $f(0) = 0$. Vidimo, da je

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} (x - 4) = -4 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} (-5x - 4) = -4. \end{aligned}$$

Iz tega sledi, da je $\lim_{x\to 0} f(x) = -4$. Vendar funkcija f ni zvezna v točki $x = 0$, saj $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0) = 0$. Graf funkcije $f(x)$ je na sliki (5.13.



Slika 5.13: Graf funkcije naloge (4)

5. Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} -5x - 1; & x < 0 \\ x^3 + 2; & x \in [0, 2] \\ 5x; & x > 2 \end{cases}$$

Izračunajte

(a) $f(0)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$

(b) $f(2)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2} f(x)$

Ali je funkcija f zvezna v točkah $x = 0$ in $x = 2$?

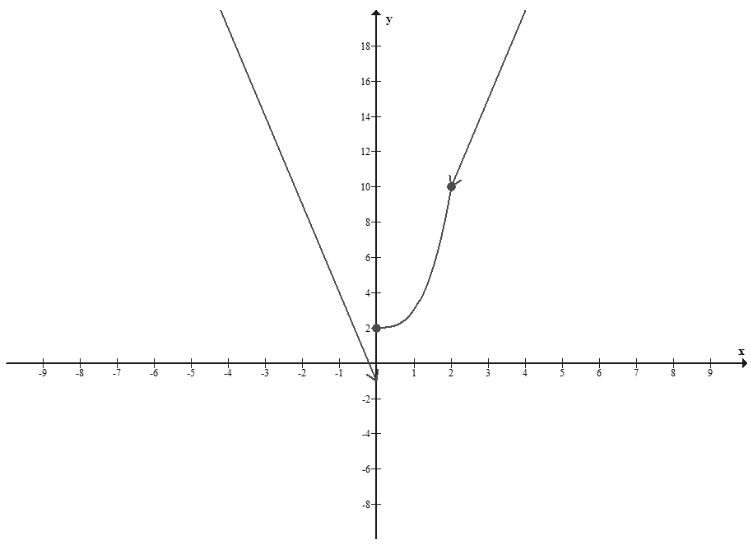
Rešitev.

(a) $f(0) = 2$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^3 + 2) = 2$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-5x - 1) = -1$, $\lim_{x\to 0} f(x)$ ne obstaja.

(b) $f(2) = 10$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 5x = 10$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x^3 + 2) = 10$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 10$.

Funkcija f ni zvezna v točki $x = 0$, v točki $x = 2$ pa je zvezna.

Graf funkcije $f(x)$ je na sliki (5.14).



Slika 5.14: Graf funkcije naloge (5)

6. Določite a tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1; & x \leq 1 \\ 4 - x^2 a; & x > 1 \end{cases}$$

zvezna.

Rešitev. Funkcija f bo zvezna, ko bo $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$. Torej $\lim_{x \to 1^+}(4 - x^2 a) = \lim_{x \to 1^-}(2x^2 + 1)$. Iz tega sledi $4 - a = 3$, kar pomeni, da je $a = 1$.

7. Določite a tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^3; & x \geq 1 \\ -3x^2 + a; & x < 1 \end{cases}$$

zvezna.

Rešitev. Ker mora biti $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$, je $1 = -3 + a$, iz česar sledi, da je $a = 4$.

8. Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-4|}{x-4}; & x \neq 4 \\ 0; & x = 4 \end{cases}$$

Ali obstaja $\lim_{x \to 4} f(x)$?

Rešitev. Vidimo, da je

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \frac{|x - 4|}{x - 4} = \lim_{x \to 4^+} \frac{x - 4}{x - 4} = 1$$

in

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \frac{|x - 4|}{x - 4} = \lim_{x \to 4^+} \frac{-(x - 4)}{x - 4} = -1.$$

S tem smo pokazali, da leva in desna limita funkcije f v točki $x = 4$ nista enaki. Iz tega sledi, da ne obstaja $\lim_{x \to 4} f(x)$.

9. Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$

Ali je funkcija zvezna v točki $x = 0$?

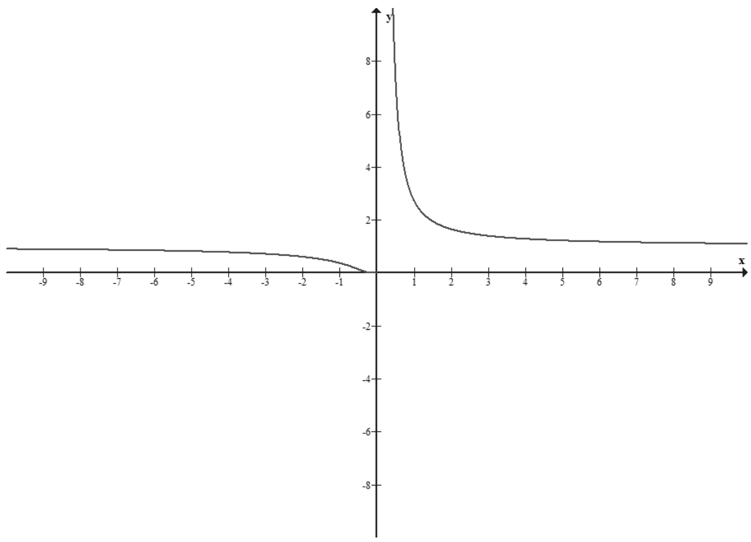
Rešitev. Ker je $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, je

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Ker je $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, je

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty.$$

S tem smo pokazali, da leva in desna limita funkcije f v točki $x = 0$ nista enaki, iz česar sledi, da funkcija f ni zvezna v točki $x = 0$.



Slika 5.15: $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

10. Določite $f(a)$ tako, da bodo dane funkcije zvezne v točki a.

(a) $f(x) = \frac{\sin(3x)}{4x}$, $a = 0$

(b) $f(x) = (1 + 5x)^{\frac{1}{2x}}$, $a = 0$

(c) $f(x) = \frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}$, $a = 4$

(d) $f(x) = \frac{\sqrt{10-x}-\sqrt{8+x}}{x-1}$, $a = 1$

(e) $f(x) = \frac{\sqrt{11-x}-3}{4-2\sqrt{2+x}}$, $a = 2$

Rešitev. Funkcija f bo zvezna v točki a, ko bo $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

(a) $f(0) = \frac{3}{4}$

(b) $f(0) = e^{\frac{5}{2}}$

(c) $f(4) = -\frac{1}{16}$

(d) $f(1) = -\frac{1}{3}$

(e) $f(2) = \frac{1}{3}$

Literatura

[1] Bogataj L., Ferbar L.: Matematika I. Osnove, linerana algebra, funkcije. UL, EF, Ljubljana, 2005.

[2] Cedilnik, A.: Matematični priročnik. Didakta, Radovljica, 1997.

[3] Dolinar G., Demšar U.: Rešene naloge iz matematike I za VSP. Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko, Ljubljana, 2004.

[4] Fošner M.: Matematične metode 1. Fakulteta za logistiko, Celje, 2010.

[5] Fošner M., Gorše M., Povh J., Pustavrh S., Zalar B.: Matematične metode v uporabi. DMFA (v pripravi).

[6] Fošner M., Zalar B.: Zbirka nalog iz uporabe matematičnih metod v logistiki I. Fakulteta za logistiko, Celje, 2008.

[7] Fošner M., Zmazek B., Žerovnik J.: Matematične metode v logistiki: zapiski predavanj. Fakulteta za logistiko, Celje, 2008.

[8] Jamnik R.: Matematika. DMFA, Ljubljana, 1994.

[9] Mencinger M.: Zbirka rešenih nalog iz matematične analize in algebre. Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, Maribor, 2006.

[10] Mizori-Oblak P.: Matematika za študente tehnike in naravoslovja, 1.del. Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2001.

[11] Usenik J.: Matematične metode v prometu. Univerza v ljubljani, Fakulteta za pomorstvo in promet, Portorož, 1998.

[12] Žerovnik J., Banič I., Hrastnik I., Špacapan S.: Zbirka rešenih nalog iz tehniške matematike, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, Maribor 2003