Univerza v Mariboru
Fakulteta za logistiko

Zbirka nalog iz uporabe matematičnih metod v logistiki I

MAJA FOŠNER in BOJANA ZALAR

Celje 2008

Naslov: Zbirka nalog iz uporabe matematičnih metod v logistiki I

Avtor: doc. dr. Maja Fošner in dr. Bojana Zalar

Recenzent: doc. dr. Ajda Fošner

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51(075.8)(076.1)

FOŠNER, Maja
Zbirka nalog iz uporabe matematičnih metod v logistiki I
[Elektronski vir] / Maja Fošner in Bojana Zalar. - Celje :
Fakulteta za logistiko, 2008

Način dostopa (URL): http: //fl.uni-mb.si/eknjige/zbirka_umml_1.pdf

ISBN 978-961-6562-21-8
1. Zalar, Bojana
240023808

***Jaz, študent logistike** ...*

Naslednji teden bo kolokvij. Naloge bodo ... „take, kot na vajah“. Standardni odgovor, ki ničesar ne izda. In sedaj? 80 strani, 5 poglavij ... - to pravzaprav vem že od oktobra; predgovor pa berem le zato, da pridobim čas.

Upava, da ne boste posegali po knjigi le v paničnem predizpitnem času. In da ste v naslovih poglavij spoznali že znane pojme morda zbledelega srednješolskega znanja.

Uporaba matematičnih metod v logistiki 1 vas skuša vpeljati v osnovne tipe nalog, kakršne potem srečujete v raznih preverjanjih in se zdijo - vedno znova - novi. Zbirka je prilagojena učnemu načrtu visokega strokovnega programa. Zastavljene naloge so prikazane s celotnim potekom reševanja, ob ponavljajočih se podobnih primerih pa so podane le končne rešitve. Zbirka tako dopolnjuje predpisano izpitno literaturo:

- Fošner M.: Uporaba matematičnih metod v logistiki 1, e-gradivo,

predvsem pa pomaga prebroditi začetne nesporazume z matematičnimi nalogami.

Želiva, da bi vam koristila, tako pri izpitih, kot tudi kasneje - „v uporabi“.

Celje, julija 2008 Avtorici

Kazalo

Poglavje 1

Osnove

1.1 Realna števila

1. Zapišite elemente množic:

   (a) $A = \{x \in \mathbb{N}; x^2 = 25\}$

   (b) $B = \{x \in \mathbb{Z}; x^2 = 25\}$

   (c) $C = \{x \in \mathbb{Z}; 2x = 3\}$

   (d) $D = \{x \in \mathbb{Q}; 2x = 3\}$

   Rešitev.

   (a) Množica A vsebuje tista naravna števila, katerih kvadrat je 25. Edino takšno število je 5. Torej: $A = \{5\}$.

   (b) Množica B vsebuje tista cela števila, katerih kvadrat je 25. Takšni števili sta 2: 5 in -5. Torej: $B = \{-5, 5\}$.

   (c) Množica C vsebuje tista cela števila, ki rešijo enačbo $2x = 3$. Takšnega celega števila ni. Torej: $C = \{\}$.

   (d) Množica D vsebuje tista racionalna števila, ki rešijo enačbo $2x = 3$. V množici racionalnih števil ima dana enačba rešitev $x = \frac{3}{2}$. Torej: $D = \{\frac{3}{2}\}$.

2. V množici realnih števil rešite enačbe:

(a) $(x-2)(x+4)-(x-1)^2 = 2x-3$

(b) $x-(5x-(x+2)) = 8$

(c) $5(2+x)-3(3+x) = 2x+1$

(d) $(2x+1)^2 - x(4x-3) = 7x$

(e) $\frac{x-1}{6} + \frac{2x+1}{3} - \frac{x-1}{2} = 2x$

(f) $x^2 - 5x = 14$

(g) $x^2 + 8x - 9 = 0$

(h) $6x^2 - x - 1 = 0$

(i) $x^2 - 4x + 5 = 0$

(j) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$

(k) $x^3 - 7x + 6 = 0$

Rešitev.

(a)
- Odpravimo oklepaje: $x^2 + 2x - 8 - x^2 + 2x - 1 = 2x - 3$.
- Skrčimo izraz in po ureditvi dobimo linearno enačbo $2x = 6$ z rešitvijo $x = 3$.

(b) Kot v gornjem primeru dobimo rešitev $x = -2$.

(c) Po ureditvi dobimo identično izpolnjeno enačbo $0 = 0$, kar pomeni, da je vsako realno število $x \in \mathbb{R}$ rešitev dane enačbe. Množica rešitev je $\mathbb{R}$.

(d) Po ureditvi dobimo protislovno enačbo $1 = 0$, kar pomeni, da nobeno realno število ne reši dane enačbe. Množica rešitev enačbe je prazna.

(e)
- Odpravimo ulomke (enačbo množimo z najmanjšim skupnim večkratnikom imenovalcev, to je s 6). Dobimo

$$x - 1 + 2(2x+1) - 3(x-1) = 12x.$$

- Kot v gornjih primerih dobimo rešitev $x = \frac{2}{5}$.

(f)
- Enačba je kvadratna. Uredimo jo tako, da so vsi neničelni členi na eni (levi) strani enačbe

$$x^2 - 5x - 14 = 0.$$

- Razstavimo izraz na levi strani po Vietovem pravilu

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

in dobimo

$$(x-7)(x+2) = 0.$$

- Produkt $(x-7)(x+2)$ je enak 0, kadar je eden od faktorjev enak 0: $x - 7 = 0$ ali $x + 2 = 0$.
- Dobimo 2 rešitvi: $x_1 = 7$ in $x_2 = -2$.

Opomba: Če razcepa po Vietovem pravilu ne uganemo, uporabimo spodnje formule (primer (h)).

(g) Kot v gornjem primeru dobimo rešitvi $x_1 = 1$ in $x_2 = -9$.

(h) Rešitvi kvadratne enačbe $ax^2 + bx + c = 0$ računamo po formulah

$$D = b^2 - 4ac,\ x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

V našem primeru je $a = 6$, $b = -1$, $c = -1$ in

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1) = 25,\ \sqrt{D} = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{12}$$

$$x_1 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1-5}{12} = \frac{-1}{3}.$$

(i) Kot v gornjem primeru dobimo $D = -4$. Koren $\sqrt{D} = \sqrt{-4}$ ni realno število, dana enačba nima realnih rešitev.

(j)
- Izraz na levi strani enačbe razstavimo:

$$x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$$

$$x^2(x-4) - 9(x-4) = 0$$

$$(x-4)(x^2-9) = 0$$

$$(x-4)(x-3)(x+3) = 0.$$

- Produkt $(x-4)(x-3)(x+3)$ je enak 0, kadar je eden od faktorjev enak 0: $x - 4 = 0$ ali $x - 3 = 0$ ali $x + 3 = 0$.
- Dobimo 3 rešitve: $x_1 = 4$, $x_2 = 3$, $x_3 = -3$.

(k) Kadar izraza na levi strani enačbe (stopnje višje od 2) ne znamo razstaviti, eno rešitev x_1 uganemo in izraz (polinom) delimo z dvočlenikom $x - x_1$. Dobljeni količnik je polinom nižje stopnje, ki ga nadalje razstavimo po enem od že znanih postopkov.

- Uganemo: $x_1 = 1$.
- Delimo:

$$
\begin{array}{rl}
 & (x^3 - 7x + 6) : (x - 1) = x^2 + x - 6 \\
- & (x^3 - x^2) \\
 & \qquad x^2 - 7x + 6 \\
 & \quad\; -(x^2 - x) \\
 & \qquad\qquad -6x + 6 \\
 & \qquad\quad -(-6x + 6)
\end{array}
$$

- Razstavimo dobljeni količnik: $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$.
- Dano enačbo zapišemo v razstavljeni obliki:

$$x^3 - 7x^2 + 6 = (x - 1)(x + 3)(x - 2) = 0.$$

- Izračunamo rešitve: $x_1 = 1,\ x_2 = -3,\ x_3 = 2$.

Opomba: Namesto deljenja polinomov lahko uporabimo Hornerjev algoritem.

	1	0	−7	6
1		1	1	−6
	1	1	−6	0

3. Rešite iracionalne enačbe in napravite preizkus:

(a) $\sqrt{x + 7} + 1 = x - 4$

(b) $2x + \sqrt{2x^2 + x - 1} = 1$

Rešitev.

(a)
- Uredimo enačbo (osamimo koren na eni strani enačbe):

$$\sqrt{x + 7} = x - 5.$$

- Enačbo kvadriramo (odpravimo koren):

$$x + 7 = x^2 - 10x + 25.$$

- Rešimo kvadratno enačbo: $x_1 = 9,\ x_2 = 2$.
- Napravimo preizkus - x_1 in x_2 vstavimo v prvotno enačbo. Ugotovimo: x_1 ustreza prvotni enačbi, x_2 ne ustreza.
- Rešitev prvotne enačbe je le $x_1 = 9$.

Opomba: Če med reševanjem enačbo kvadriramo, je preizkus obvezen. Kvadrirana enačba ima (navadno) več rešitev od prvotne.

(b) Kot v gornjem primeru dobimo rešitev $x = \frac{1}{2}$.

4. Rešite eksponentne in logaritemske enačbe:

(a) $3^x = 81$

(b) $2^{(x-5)x} = (\frac{1}{4})^{x+1}$

(c) $\log_3 \sqrt[7]{3} = x$

(d) $\log_3 x = 2$

(e) $\log_{\sqrt{3}} x = \frac{1}{2}$

Rešitev.

(a) Potenci z isto osnovo $3^x = 3^4 \quad (= 81)$ sta enaki, če sta enaka eksponenta, torej $x = 4$.

(b) Enakost $2^{(x-5)x} = 2^{-2(x+1)} \quad (= (\frac{1}{4})^{x+1})$ da enakost eksponentov

$$(x - 5)x = -2(x + 1)$$

in rešitev $x_1 = 1, x_2 = 2$.

(c) Po definiciji logaritma je $3^x = \sqrt[7]{3} = 3^{\frac{1}{7}}$, torej $x = \frac{1}{7}$.

(d) Zapis definicije logaritma da rešitev $3^2 = x$ ali $x = 9$.

(e) Kot zgoraj dobimo $x = \sqrt[4]{3}$.

5. Na številski premici predstavite intervale $A = [-1, 3]$, $B = (1, 5]$, $C = (-1, 1)$ ter zapišite intervale $A \cap C, A \cup B, A \setminus B, A \setminus C, (A \cap B)^C$.

Rešitev. $A = [-1, 3]$ je krajši zapis za interval - množico

$$A = \{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x \leq 3\}.$$

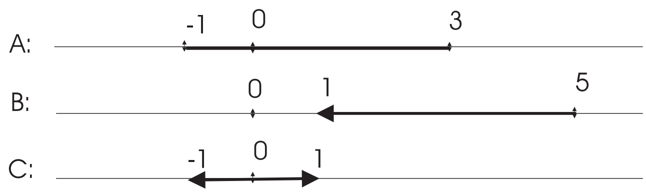
Podobno je

$$B = (1, 5] = \{x \in \mathbb{R}; 1 < x \leq 5\}$$

in

$$C = (-1, 1) = \{x \in \mathbb{R}; -1 < x < 1\}.$$

Množice narišemo eno pod drugo.



- V preseku množic $A \cap C$ so tista realna števila, ki so hkrati v obeh množicah A in C. Nazorno to na gornji sliki pomeni "dvojno odebeljeno črto".
  $A \cap C = C = (-1, 1)$, ker je $C \subset A$.
- V uniji množic $A \cup B$ so tista realna števila, ki so vsaj v eni od množic A ali B. Nazorno to na sliki pomeni "tam, kjer je vsaj ena odebeljena črta".
  $A \cup B = [-1, 5]$
- V množici $A \setminus B$ so tista realna števila, ki so v množici A in niso v množici B. Nazorno to na sliki pomeni, da iz množice A izločimo "tisti del, kjer je črta dvojna".
  $A \setminus B = [-1, 1]$
- Kot v gornjem primeru dobimo $A \setminus C = \{-1\} \cup [1, 3]$.
- Najprej zapišemo presek $P = (A \cap B) = (1, 3]$.
  V komplementu množice P so tista realna števila, ki niso v množici P. Nazorno to na sliki pomeni, da "tam odebeljene črte ni".
  $P^C = (A \cap B)^C = (1, 3]^C = (-\infty, 1] \cup (3, \infty)$
  Opomba: Dani primer ponazarja veljavnost $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

6. V množici realnih števil rešite naslednje neenačbe in rešitve zapišite z intervali:

   (a) $2(x-1) > 4(x+4) - 5$
   (b) $(x-1)(x+2) - x(x+3) \leq 2$
   (c) $x^2 - 2x > 8$
   (d) $x^3 - 3x^2 - 4x \geq 0$
   (e) $\frac{x-5}{x+3} \geq 0$

Rešitev.

(a)
- Linearno neenačbo uredimo (kakor linearno enačbo):

$$-2x > 13.$$

- Če je koeficient pri neznanki x negativen, neenačbo množimo z -1. Pri tem se neenakost obrne:

$$2x < -13.$$

- Po deljenju s (pozitivnim) številom 2 dobimo rešitev (zapisano kot izjavo):

$$x < \frac{-13}{2} \quad \text{oziroma} \quad x \in (-\infty, \frac{-13}{2}).$$

  Opomba: Interval je (desno) odprt, ker v neenačbi nastopa stroga neenakost; $\frac{-13}{2}$ ni rešitev.

(b) Kot v gornjem primeru dobimo rešitev:

$$x \geq -2 \quad \text{oziroma} \quad x \in [-2, \infty).$$

Opomba: Interval je (levo) zaprt, ker tudi vrednost -2 reši neenačbo (znak $\leq$ vključuje tudi enakost).

(c) Kvadratne neenačbe in neenačbe višjih stopenj (najenostavneje) rešimo na sledeči način:

- Vse člene prenesemo na eno (levo) stran neenačbe:

$$x^2 - 2x - 8 > 0.$$

- Rešimo enačbo $x^2 - 2x - 8 = 0$. Rešitvi sta: $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.
- Rešitvi (ničli izraza na levi strani neenačbe) narišemo na realno os.
- Izberemo eno vrednost, ki ni enaka dobljenima ničlama, na primer $x = 0$, in izračunamo vrednost izraza $x^2 - 2x - 8$ (to je izraza na levi) v tej točki:

  $$0^2 - 2 \cdot 0 - 8 = -8.$$

  Vrednost izraza $x^2 - 2x - 8$ v točki $x = 0$ je negativna. Vrednost izraza $x^2 - 2x - 8$ je negativna povsod na intervalu med ničlama (-2 in 4), v vsaki od ničel pa predznak spremeni (slika (1.1)).
- Iz slike odčitamo rešitev - intervale, kjer je vrednost izraza (strogo) pozitivna: $x \in (-\infty, -2)$ ali $x \in (4, \infty)$ oziroma $x \in (-\infty, -2) \cup (4, \infty)$.

Slika 1.1: $x^2 - 2x - 8 > 0$

(d) Kot v gornjem primeru dobimo ničle izraza $x^3 - 3x^2 - 4x$:

$$x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 4$$

in rešitev

$$x \in [-1, 0] \cup [4, \infty].$$

(e) Če imamo na levi strani neenakosti (urejene tako, da je na desni vrednost 0) racionalen izraz, na realno os narišemo vse ničle števca in imenovalca. Racionalen izraz spremeni predznak bodisi v ničli števca bodisi v ničli imenovalca. Iz ustrezne slike odčitamo rešitev (kot v prejšnjih primerih): $x \in (-\infty, -3) \cup [5, \infty)$.
Opomba: Ničla imenovalca -3 ni rešitev (tam neenačba ni definirana), ničla števca 5 je rešitev (neenakost ni stroga).

7. Dano množico zapišite kot interval in mu določite maksimum, minimum, supremum in infimum.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R}; 5 \geq 2x - 1 > -3\}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{R}; 2x - 1 \leq 3x + 1 < 2x + 3\}$

Rešitev.

(a) Množica A vsebuje tiste $x \in \mathbb{R}$, ki ustrezajo neenačbama

i. $5 \geq 2x - 1$ z rešitvijo $x \leq 3$ oziroma $x \in (-\infty, 3]$ in

ii. $2x - 1 > -3$ z rešitvijo $x \in (-2, \infty)$.

Obema neenačbama ustrezajo tisti $x \in \mathbb{R}$, ki so v preseku rešitev posameznih neenačb: $A = (-\infty, 3] \cap (-2, \infty) = (-2, 3]$ oziroma

$$A = \{x \in \mathbb{R}; -2 < x \leq 3\}.$$

- $\text{maks}A = 3$ (največje število množice A)
- $\min A$ ne obstaja (množica A ne vsebuje najmanjšega števila)
- $\sup A = 3$ (najmanjša zgornja meja)
- $\inf A = -2$ (največja spodnja meja)

(b) $B = [-2, 2)$

$\text{maks}B$ ne obstaja, $\min B = -2$, $\sup B = 2$, $\inf B = -2$

8. Rešite sisteme neenačb:

(a) $x - 3 \leq 0$ in $2x + 1 > 5$

(b) $3x - 6 < 3$ in $x^2 - 9 \geq 0$

(c) $\frac{x+2}{x-1} < 1$ in $x^2 - 3 \leq 2x$

Rešitev.

(a) Rešimo vsako neenačbo posebej (kot opisano v nalogi 6):

i. $x - 3 \leq 0$: $x \in (-\infty, 3]$

ii. $2x + 1 > 5$: $x \in (2, \infty)$

Obe neenačbi rešijo tisti $x \in \mathbb{R}$, ki so v preseku rešitev posameznih enačb:

$$x \in (-\infty, 3] \cap (2, \infty) = (2, 3].$$

(b) $x \in (-\infty, -3]$

(c) $x \in [-1, 1)$

9. V množici realnih števil rešite naslednje enačbe, neenačbe in sisteme neenačb z absolutno vrednostjo:

   (a) $|x - 1| = 2$

   (b) $|2x + 3| = 1$

   (c) $|x + 7| = 2x - 3$

   (d) $|x + |-2|| = 4x - 1$

   (e) $|x + 3| \leq 2$

   (f) $|2x - 4| < 4$

   (g) $|x - 2| < 3$ in $x - 1 \geq 0$

   (h) $|x - 1| \geq 3$ in $|x + 1| < 8$

   (i) $|x - 1| > 2$ in $x^2 - x < 20$

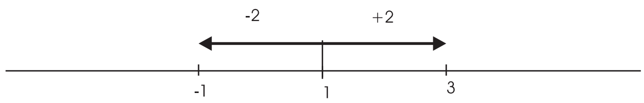
Rešitev.

(a) Postopek reševanja enačb:

- Pred izraz v absolutni vrednosti postavimo prvič znak $+$, drugič znak $-$ in obe rešimo.
  i. $x - 1 = 2, x = 3$
  ii. $-(x - 1) = 2, x = -1$
- Napravimo preizkus. V tem primeru obe rešitvi $x_1 = 3$ in $x_2 = -1$ ustrezata prvotni enačbi.

Preizkus je obvezen. Ni nujno, da vse tako dobljene rešitve rešijo prvotno enačbo.
Opomba: $|x|$ pomeni oddaljenost števila x od števila 0, $|x - 1|$ pomeni oddaljenost števila x od števila 1. Enakost $|x - 1| = 2$ označuje tista realna števila, ki so od števila 1 oddaljena za 2 (slika (1.2)): $1 + 2 = 3$ in $1 - 2 = -1$ sta torej rešitvi enačbe.

(b) Opisani postopek da rešitvi $x_1 = -1, x_2 = -2$. Obe ustrezata prvotni enačbi.



Slika 1.2: $|x-1|=2$

(c) Opisani postopek da rešitvi $x_1 = 10, x_2 = \frac{-4}{3}$. Prvotni enačbi ustreza le prva $x_1 = 10$.

(d) Opisani postopek da rešitvi $x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = 1$. Prvotni enačbi ustreza le druga $x_2 = 1$.

(e) Pri reševanju neenačb oblike

$$|x-a| > (\text{ali } \geq, \leq, <) \quad b$$

uporabimo pomen absolutne vrednosti, omenjen v gornji opombi.

- $|x+3|$ zapišemo kot $|x-(-3)|$.
- Neenačba $|x+3| = |x-(-3)| \leq 2$ sprašuje po tistih številih $x \in \mathbb{R}$, ki so od števila -3 oddaljena za 2 ali manj. To so števila z intervala $x \in [-3-2, -3+2] = [-5, -1]$.

(f)
- Izpostavimo 2: $2|x-2| < 4$.
- Delimo z 2: $|x-2| < 2$.
- Kot zgoraj dobimo rešitev: $x \in (0, 4)$.

(g) Sisteme neenačb rešujemo kot v prejšnji nalogi (naloga 8): rešimo vsako neenačbo posebej, rešitev sistema je presek rešitev posameznih enačb.

- Rešitev prve neenačbe: $x \in (-1, 5)$
- Rešitev druge neenačbe: $x \in [1, \infty)$
- Rešitev $x \in [1, 5)$

(h) $x \in (-9, -2] \cup [4, 7)$

(i) $x \in (-4, -1) \cup (3, 5)$

1.2 Kompleksna števila

10. Izračunajte:

    (a) $(2-i)(3+i\sqrt{2})$

    (b) $(2+i)^2+(1-i)^3$

    (c) $4i^6+(-2i^3)^3$

    (d) $\frac{5+2i}{1-2i}$

Rešitev.

(a) Kompleksna števila seštevamo (odštevamo) po komponentah, množimo (potenciramo) jih kakor dvočlenike.
Račun: $(2-i)(3+i\sqrt{2}) = 6-3i+2\sqrt{2}i-i^2\sqrt{2} =$ (upoštevamo $i^2=-1$) $= (6+\sqrt{2})+(2\sqrt{2}-3)i$

(b) Kot zgoraj: $(2+i)^2+(1-i)^3 = -2-2i$

(c) Za zaporedne potence števila i velja:
$i^2=-1, i^3=-i, i^4=1, i^5=i^4\cdot i=i, \ldots$ ali
$i^{4k}=1, i^{4k+1}=i, i^{4k+2}=-1, i^{4k+3}=-i,\ k\in\mathbb{N}$.
Uporabimo gornje v računu:
$4i^6+(-2i^3)^3 = 4i^6+(-2)^3i^9 = 4i^2-8i=-4-8i.$

(d) Kompleksna števila delimo tako, da števec in imenovalec množimo z imenovalcu konjugiranim kompleksnim številom.
Račun: $\frac{5+2i}{1-2i} = \frac{5+2i}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i} = \frac{1+12i}{5} = \frac{1}{5}+\frac{12}{5}i$

11. Izračunajte $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $\overline{z}$, $|z|$ in $\frac{z-\overline{z}}{1+z\cdot\overline{z}}$, če je $z=3-4i$.

Rešitev.

- Realna komponenta kompleksnega števila z: $\mathrm{Re}(z)=3$
- Imaginarna komponenta kompleksnega števila z: $\mathrm{Im}(z)=-4$
- Številu z konjugirano kompleksno število $\overline{z}$ dobimo, če spremenimo predznak imaginarne komponente: $\overline{z}=3+4i$.
- Absolutna vrednost kompleksnega števila $|z|$ pomeni oddaljenost kompleksnega števila z od izhodišča. Izračunamo jo po Pitagorovem izreku: $|z|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$

- Račun: $\frac{z-\overline{z}}{1+z\cdot\overline{z}} = \frac{3-4i-(3+4i)}{1+(3-4i)(3+4i)} = \frac{-8i}{26} = \frac{-4i}{13}$

12. Izračunajte $\mathrm{Im}\frac{|z|+\overline{z}}{z-\overline{z}+1}$, če je $z = 3i - 4$.

Rešitev.

- Dano kompleksno število zapišemo urejeno kot $\mathrm{Re}z+(\mathrm{Im}z)i$: $z = -4 + 3i$.
- Račun: $\mathrm{Im}\frac{|z|+\overline{z}}{z-\overline{z}+1} = \frac{5+(-4-3i)}{-4+3i-(-4-3i)+1} = \frac{1-3i}{1+6i} = \frac{-17}{37} - \frac{9}{37}i$

13. V množici kompleksnih števil rešite naslednje enačbe:

(a) $z^2 + 9 = 0$

(b) $z^4 + 8z^2 = 0$

(c) $x^2 - 4x + 5 = 0$

(d) $iz^2 + (2 + i)z + 1 = 0$

Rešitev.

(a) Enačba $z^2 = -9$ ima v množici kompleksnih števil rešitvi

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9}\sqrt{-1} = \pm 3i.$$

(b)
- Razstavimo: $z^4 + 8z^2 = z^2(z^2 + 8) = 0$.
- Produkt $z^2(z^2 + 8) = 0$, če je $z^2 = 0$ ali $z^2 + 8 = 0$.
- Prva enačba ima rešitvi (oziroma eno dvojno rešitev) $z_{1,2} = 0$, rešitvi druge enačbe sta (računamo kot zgoraj)

$$z_{3,4} = \pm\sqrt{8}i = \pm 2\sqrt{2}i.$$

- Dana enačba ima 4 rešitve:

$$z_{1,2} = 0,\ z_3 = 2\sqrt{2}i,\ z_4 = -2\sqrt{2}i.$$

(c) Uporabimo formulo za izračun korenov kvadratne enačbe (primerjajte nalogi 2.(h) in 2.(i)).

$$D = -4, \sqrt{D} = 2i$$

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i$$
$$z_1 = 2 + i,\ z_2 = 2 - i$$

Opomba: Kompleksni rešitvi kvadratne enačbe z realnimi koeficienti sta med sabo konjugirani.

(d) Formula za izračun korenov kvadratne enačbe (naloga 2.(h)) velja tudi, če koeficienti a, b, c niso realna števila.

$$D = (2+i)^2 - 4i = 3, \sqrt{D} = \sqrt{3}$$

$$z_{1,2} = \frac{-2 - i \pm \sqrt{3}}{2i} = \frac{-1}{2} + \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} i$$
$$z_1 = \frac{-1}{2} + \frac{2+\sqrt{3}}{2} i,\ z_2 = \frac{-1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2} i$$

14. Poiščite kompleksna števila z, ki ustrezajo:

(a) $|z| + z = 2 + i$
(b) $\mathrm{Re}(z - iz) = 0$ in $\mathrm{Im}(z) = 2$
(c) $\mathrm{Re}(z)+ \mathrm{Im}(z) = 0$
(d) $|z + 1 + i| = 1$ in $\mathrm{Re}(z + 1 + i) = 0$
(e) $|z - 1| = |z - i|$
(f) $|z| = 4$
(g) $|z - (3 + 4i)| = 2$
(h) $|z + i| = 0$
(i) $|z + 1 - 2i| = -2$
(j) $|z + 2i| \leq 3$

Rešitev.

(a) Če v enačbi nastopa bodisi konjugirana vrednost bodisi absolutna vrednost bodisi realna ali imaginarna komponenta kompleksnega števila z, iščemo neznano število z v obliki $z = x + yi$, kjer sta $x, y \in \mathbb{R}$.

- Vstavimo $z = x + yi$ v enačbo in dobimo:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + x + yi = 2 + i.$$

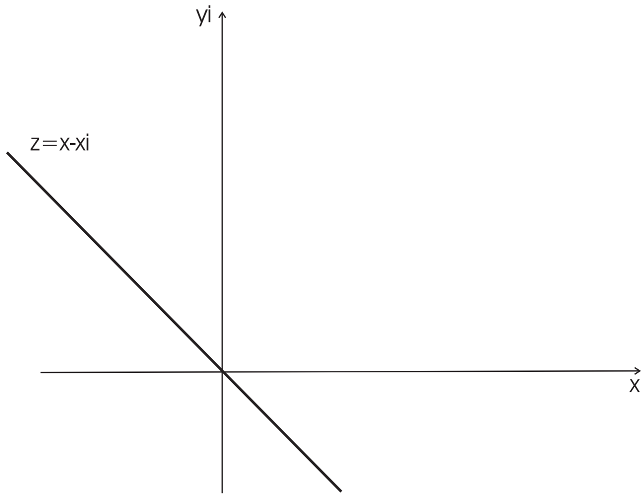
- Kompleksni števili sta enaki, če imata enako realno in imaginarno komponento.
  Enakost imaginarnih komponent da enačbo $yi = i$ in rešitev $y = 1$.
  Enakost realnih komponent da enačbo $\sqrt{x^2 + y^2} + x =$ (vstavimo $y = 1$) $= \sqrt{x^2 + 1} + x = 2$ in rešitev $x = \frac{3}{4}$.
  Iskano kompleksno število je $z = \frac{3}{4} + i$.

(b)
- Postavimo $z = x + yi$.
- Iz druge enačbe dobimo $\mathrm{Im} z = y = 2$.
- Izračunani y vstavimo v prvo enačbo in dobimo $\mathrm{Re}(z - iz) = x + y = x + 2 = 0$ z rešitvijo $x = -2$.
- Iskano kompleksno število je $z = -2 + 2i$.

(c) Vstavimo $z = x+yi$ v enačbo in dobimo $\mathrm{Re}(z)+ \mathrm{Im}(z) = x+y = 0$, od koder izrazimo $y = -x$. Enačbo rešijo vsa kompleksna števila, katerih komponenti sta nasprotno enaki:

$$z = x - xi = (1 - i)x, x \in \mathbb{R}.$$

Ležijo na premici, upodobljeni na sliki (1.3).



Slika 1.3: $z = x - xi$

(d)
- Postavimo $z = x + yi$.

- Iz druge enačbe dobimo $\mathrm{Re}(z+1+i) = x+1 = 0$ z rešitvijo $x = -1$.
- Izračunani x vstavimo v prvo enačbo in dobimo $|z+1+i| = |(y+1)i| = \sqrt{(y+1)^2} = 1$.
- Po kvadriranju zadnje enakosti $\sqrt{(y+1)^2} = 1$ dobimo kvadratno enačbo $(y+1)^2 = 1$ z rešitvama $y_1 = 0$ in $y_2 = -2$.
- Iskani kompleksni števili sta $z_1 = -1, z_2 = -1-2i$.

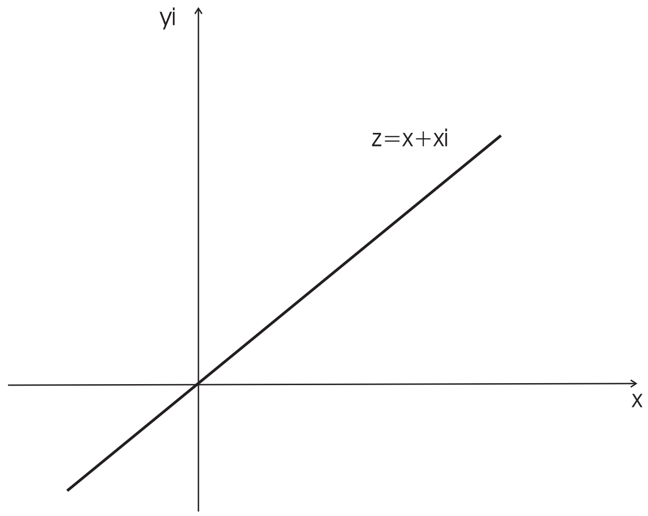
(e) Vstavimo $z = x + yi$ v enačbo in dobimo

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2},$$

od koder izrazimo $y = x$. Enačbo rešijo vsa kompleksna števila, katerih komponenti sta enaki:

$$z = x + xi = (1+i)x, x \in \mathbb{R}.$$

Ležijo na premici, upodobljeni na sliki (1.4).



Slika 1.4: $z = x + xi$

(f) Vstavimo $z = x + yi$ v enačbo in dobimo $\sqrt{x^2 + y^2} = 4$ in po kvadriranju $x^2 + y^2 = 16$. Enačba predstavlja krožnico s središčem v izhodišču in polmerom enakim 4.

Enačbo lahko rešimo tudi z razmislekom:
$|z|$ pomeni oddaljenost kompleksnega števila z od izhodišča. $|z| = 4$ označuje tista kompleksna števila, ki so od izhodišča oddaljena za 4. To so kompleksna števila, ki ležijo na krožnici s središčem v izhodišču in polmerom 4.

(g) $|z-(3+4i)|=2$ označuje tista kompleksna števila, ki so od $3+4i$ oddaljena za 2. To so kompleksna števila, ki ležijo na krožnici s središčem v točki $3+4i$ in polmerom 2.

(h) $|z+i|=0$ označuje tista kompleksna števila, ki so od $-i$ oddaljena za 0. To je točka $z=-i$.

(i) $|z+1-2i|=-2$ označuje tista kompleksna števila, ki so od $-1+2i$ oddaljena za -2. Ta množica je prazna.

(j) $|z+2i| \leq 3$ označuje tista kompleksna števila, ki so od $-2i$ oddaljena za kvečjemu 3. To so števila, ki ležijo v krogu (v notranjosti kroga in na krožnici) s središčem v točki $-2i$ in polmerom 3.

15. Zapišite kompleksna števila $z_1 = 7$, $z_2 = -4i$, $z_3 = \sqrt{3}+i$ v polarni obliki.

Rešitev.

- Oddaljenost števila z_1 od izhodišča je 7. Kot, ki ga tvori poltrak iz izhodišča skozi z_1 s pozitivnim poltrakom realne osi je 0.

$$z_1 = 7(\cos 0 + i \sin 0)$$

- Oddaljenost števila z_2 od izhodišča je 4. Kot, ki ga tvori poltrak iz izhodišča skozi z_2 s pozitivnim poltrakom realne osi je $-\frac{\pi}{2}$.

$$z_2 = 4(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2}))$$

- Oddaljenost števila z_3 od izhodišča je $|z_3| = \sqrt{3+1} = 2$. Kot, ki ga tvori poltrak iz izhodišča skozi z_3 s pozitivnim poltrakom realne osi je $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.

$$z_3 = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6}))$$

16. Izračunajte potence

(a) $(\sqrt{3}+\sqrt{3}i)^5$

(b) $(1-i)^{100}$

Rešitev. Prednost polarnega zapisa kompleksnega števila

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

se pokaže pri potenciranju in korenjenju (glejte naslednjo nalogo). Velja:

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

(a)
- Dano število zapišemo v polarnem zapisu:

$$\sqrt{3} + \sqrt{3}i = \sqrt{6}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}).$$

- Potenciramo z uporabo gornje formule:

$$(\sqrt{3} + \sqrt{3}i)^5 = 6^{\frac{5}{2}}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) =$$

$$= 36\sqrt{6}(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -36\sqrt{3}(1+i).$$

(b)
- $(1-i) = \sqrt{2}(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4})$
- $(1-i)^{100} = 2^{50}(\cos\frac{-100\pi}{4} + i\sin\frac{-100\pi}{4}) =$
  $= 2^{50}(\cos(-25\pi) + i\sin(-25\pi)) =$
  $= 2^{50}(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)) = -2^{50}$

17. Rešite enačbi

(a) $z^5 = -1$

(b) $z^4 = -1 + i$

Rešitev. Rešitev enačbe

$$z^n = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

je n različnih korenov kompleksnega števila $r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$:

$$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\varphi}{n} + \frac{k2\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi}{n} + \frac{k2\pi}{n})), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

(a) • Kompleksno število na desni strani enačbe zapišemo v polarni obliki
$$-1 = 1(\cos(\pi) + i\sin(\pi)).$$
• Po gornji formuli zapišemo 5 korenov dane enačbe:
$$z_0 = \cos(\frac{\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{5})$$
$$z_1 = \cos(\frac{3\pi}{5}) + i\sin(\frac{3\pi}{5})$$
$$z_2 = \cos(\frac{5\pi}{5}) + i\sin(\frac{5\pi}{5}) = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$$
$$z_3 = \cos(\frac{7\pi}{5}) + i\sin(\frac{7\pi}{5})$$
$$z_4 = \cos(\frac{9\pi}{5}) + i\sin(\frac{9\pi}{5})$$
Opomba: z_2 je en (edini) realni koren enačbe $z^5 = -1$.

(b) • $-1 + i = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$
• Rešitve enačbe:
$$z_0 = \sqrt[8]{2}(\cos\frac{3\pi}{16} + i\sin\frac{3\pi}{16})$$
$$z_1 = \sqrt[8]{2}(\cos\frac{11\pi}{16} + i\sin\frac{11\pi}{16})$$
$$z_2 = \sqrt[8]{2}(\cos\frac{19\pi}{16} + i\sin\frac{19\pi}{16)}$$
$$z_3 = \sqrt[8]{2}(\cos\frac{27\pi}{16} + i\sin\frac{27\pi}{16})$$

Poglavje 2

Matrike

2.1 Računanje z matrikami

1. Podana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte

$$\frac{1}{3}(A + A^T).$$

Rešitev. Najprej zapišimo matriko A. Torej

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ker je $A = A^T$, je

$$A + A^T = A + A = 2A.$$

Iz tega sledi, da je

$$\frac{1}{3}(A + A^T) = \frac{2}{3}A.$$

2. Podani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte produkt AB in BA. Ali matriki komutirata?

Rešitev. Produkt matrik je:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriki ne komutirata, saj je $AB \neq BA$.

3. Podani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte produkt AB^T.

Rešitev. Ker je

$$B^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

je produkt

$$AB^T = \begin{bmatrix} 19 & -8 & -10 \\ 10 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -10 \end{bmatrix}.$$

4. Podani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte $(3A - B^T)^2$.

Rešitev. Ker je

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

je

$$3A - B^T = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -14 \\ 10 & 1 & -3 \\ -6 & 16 & 4 \end{bmatrix}.$$

Iz tega sledi, da je

$$(3A - B^T)^2 = \begin{bmatrix} 100 & -224 & 0 \\ -12 & -47 & -155 \\ 160 & 80 & 52 \end{bmatrix}.$$

5. Naj bo dana matrika

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & -2 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Zapišite matriko A kot vsoto simetrične in poševno simetrične matrike.

Rešitev. Kvadratno matriko A lahko zapišemo kot

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T),$$

kjer je $\frac{1}{2}(A + A^T)$ simetrična matrika, $\frac{1}{2}(A - A^T)$ pa poševno simetrična matrika. Torej moramo zapisati matriki $\frac{1}{2}(A + A^T)$ in $\frac{1}{2}(A - A^T)$. Ker je

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 7 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

je simetrična matrika

$$\frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 9 \\ -1 & 14 & -3 \\ 9 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

in poševno simetrična matrika

$$\frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. Naj bo dana matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte determinanto matrike A^2.

Rešitev. Ker je

$$A^2 = \begin{bmatrix} -41 & 7 \\ -12 & -38 \end{bmatrix},$$

je determinanta matrike A^2

$$\det A^2 = (-41) \cdot (-38) - (-12) \cdot 7 = 1642.$$

7. Podani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 7 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

Izračunajte determinanto matrike BA.

Rešitev. Najprej izračunamo

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 14 & 3 \\ -9 & 14 & -5 \\ -12 & 63 & -31 \end{bmatrix}.$$

Determinanta matrike BA je -4263.

8. Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rešite matrično enačbo $AX = B$.

Rešitev. Matrično enačbo $AX = B$ množimo z leve strani z matriko A^{-1}. Torej je:

$$\begin{aligned} A^{-1}AX &= A^{-1}B \\ IX &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B. \end{aligned}$$

Pri tem je I identična matrika.

Ker je $X = A^{-1}B$, moramo najprej poiskati matriko A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{14} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

Torej je

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{14} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}.$$

9. Podani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešite matrično enačbno $XA = B$.

Rešitev. Matrično enačbo $XA = B$ pomnožimo z desne strani z matriko A^{-1}. Torej je $X = BA^{-1}$. Ker je

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 2 \end{bmatrix},$$

je

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{11}{8} & -\frac{31}{8} & -\frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{15}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

10. Podani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -4 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešite matrično enačbno $XA + 2X = B$.

Rešitev. Najprej bomo matrično enačbo $XA+2X = B$ zapisali drugače:

$$X(A + 2I) = B.$$

Sedaj bomo množli pravkar zapisano matrično enačbo z desne strani z matriko $(A + 2I)^{-1}$. Torej je:

$$\begin{aligned} X(A + 2I)(A + 2I)^{-1} &= B(A + 2I)^{-1} \\ XI &= B(A + 2I)^{-1} \\ X &= B(A + 2I)^{-1}. \end{aligned}$$

Vidimo, da moramo najprej zapisati matriko $A + 2I$:

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Naslednji korak je zapisati matriko $(A + 2I)^{-1}$:

$$(A + 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{24} & -\frac{17}{24} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}.$$

Sedaj lahko zapišemo iskano matriko X:

$$X = B(A + 2I)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{8} & -\frac{19}{8} & \frac{15}{4} \end{bmatrix}.$$

2.2 Sistemi linearnih enačb

11. Rešite sistem enačb

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 2 \\ -2x + 2y &= 1 \\ -x - y + 3z &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev. Sistem bomo rešili s pomočjo Gaussove eliminacije. Najprej zapišimo razširjeno matriko sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Pomnožimo prvo vrstico s številom 2 in jo prištejmo drugi vrstici:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 5 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right].$$

Tretji vrstici prištejmo prvo vrstico:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Rešitve sistema dobimo tako, da zaporedoma rešujemo enačbe, ki ustrezajo vrsticam od spodaj navzgor. Torej, iz tretje vrstice dobimo

$$z = 2.$$

Vrednost spremenljivke y dobimo iz druge vrstice

$$4y - 4z = 5.$$

Če upoštevamo vrednost spremenljivke z, sledi $y = \frac{13}{4}$. Vrednost spremenljivke x pa dobimo iz prve vrstice

$$x + y - 2z = 2.$$

S pomočjo dobljenih rezultatov lahko izračunamo, da je $x = \frac{11}{4}$.

12. Rešite sistem enačb

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 5 \\ -2x + 2y + 2z &= 1 \\ 5x - y + z &= 3. \end{aligned}$$

Rešitev. Rešitev sistema je

$$x = \frac{7}{8}, \quad y = \frac{11}{8}, \quad z = 0.$$

13. Rešite sistem enačb

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 7 \\ -5x + y - 2z &= 0 \\ 10x - 2y + 4z &= 6. \end{aligned}$$

Rešitev. Sistem nima rešitve.

14. Rešite sistem enačb

$$\begin{aligned} 4x - 2y + z &= 1 \\ -x + y - 2z &= 5 \\ -8x + 4y - 2z &= -2. \end{aligned}$$

Rešitev. Rešitev sistema je

$$x = \frac{3}{2}z + \frac{11}{2}, \quad y = \frac{7}{2}z + \frac{21}{2}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

15. Rešite sistem enačb

$$\begin{aligned}
x + y + 3z + q &= 2 \\
-5x + +z - 2q &= 1 \\
3y + 2z - q &= 0 \\
-x + 3z = 3.
\end{aligned}$$

Rešitev. Rešitev sistema je

$$x = \frac{1}{4}, \quad y = \frac{-11}{12}, \quad z = \frac{13}{12}, \quad q = \frac{-7}{12}.$$

Poglavje 3

Vektorji

3.1 Osnovne operacije z vektorji

1. V kartezičnem koordinatnem sistemu so dane točke $A(1,0,-1)$, $B(0,2,1)$ in $C(-3,0-1)$.

   (a) Zapišite krajevne vektorje točk A, B in C.

   (b) Poiščite koordinate vektorjev $\vec{AB}, \vec{BA}, \vec{AC}$ in $\vec{CB}$.

   (c) Izračunajte razdaljo med točkama A in B ter dolžino vektorja $\vec{AB}$.

   (d) Izračunajte razdaljo med točkama A in C ter dolžino vektorja $\vec{AC}$.

   (e) Zapišite enotski vektor v smeri vektorja $\vec{AB}$.

   (f) Zapišite enotski vektor v smeri vektorja $\vec{CA}$.

   (g) Zapišite vektor dolžine 5 v smeri vektorja $\vec{AB}$.

   (h) Zapišite vektor dolžine 7 v nasprotni smeri vektorja $\vec{BC}$.

   Rešitev.

   (a) Krajevni vektor točke A (oznaka $\vec{r_A}$) je vektor z začetno točko $O(0,0,0)$ in končno točko A. Njegove koordinate so enake koordinatam točke A: $\vec{r_A} = (1,0,-1)$.
   $\vec{r_B} = (0,2,1)$
   $\vec{r_C} = (-3,0,-1)$

   (b) Koordinate vektorja $\vec{AB}$ so razlike koordinat točke B (končna točka) in točke A (začetna točka):

   $$\vec{AB} = (0-1, 2-0, 1-(-1)) = (-1,2,2).$$

Vektor $\vec{BA}$ kaže v nasprotno smer kot vektor $\vec{AB}$. Njegove koordinate so nasprotne koordinatam vektorja $\vec{AB}$: $\vec{BA} = (1, -2, -2)$.
$\vec{AC} = (-4, 0, 0)$
$\vec{CB} = (3, 2, 2)$
Opomba: Opazimo, da je $\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$ (narišite skico).

(c) Razdalja med točkama A in B je enaka dolžini daljice med točkama A in B (oznaka $|AB|$, izračunamo jo po Pitagorovem izreku), ta pa je enaka dolžini vektorja $\vec{AB}$ (oznaka $|\vec{AB}|$):

$$|AB| = |\vec{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3.$$

(d) $|AC| = |\vec{AC}| = 4$

(e) Enotski vektor v smeri vektorja $\vec{AB}$ (oznaka $e_{\vec{AB}}$) dobimo, če vektor $\vec{AB}$ delimo z njegovo dolžino:

$$e_{\vec{AB}} = \frac{1}{3}(-1, 2, 2) = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}).$$

(f) $e_{\vec{CA}} = (1, 0, 0)$
Opomba: To je enotski vektor v pozitivni smeri koordinatne osi x, oznaka $\vec{\imath}$.

(g) Iskani vektor $\vec{v}$ dobimo, če enotski vektor v smeri vektorja $\vec{AB}$ množimo s 5:

$$\vec{v} = 5e_{\vec{AB}} = (-\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{10}{3}).$$

(h) Iskani vektor $\vec{v}$ dobimo, če enotski vektor v smeri vektorja $\vec{BC}$ množimo z -7:

$$\vec{v} = -7\frac{1}{\sqrt{17}}(-3, -2, -2) = \frac{7}{\sqrt{17}}(3, 2, 2).$$

2. Dane so točke $A(-2, -1, 0), B(0, 1, 2), C(20, 202, 2)$ in $D(22, 200, 0)$. Poiščite koordinate vektorja $\vec{a} = 2\vec{AB} + \vec{CD}$ in izračunajte njegovo dolžino.

Rešitev.

- $\vec{AB} = (2, 2, 2), \vec{CD} = (2, -2, -2)$

- Vektorje seštevamo (odštevamo) in množimo s številom po koordinatah:
$$\vec{a} = 2\vec{AB} + \vec{CD} =$$
$$= 2(2,2,2) + (2,-2,-2) = (4,4,4) + (2,-2,-2) = (6,2,2).$$
- Dolžina vektorja (po Pitagorovem izreku):
$$|\vec{a}| = \sqrt{36+4+4} = \sqrt{44}$$

3. Dana sta vektorja $\vec{a} = (0,1,0)$ in $\vec{b} = (1,0,-1)$. Izračunajte dolžino vektorja $3\vec{a} - 2\vec{b}$.

Rešitev. Kot zgoraj izračunamo

- $3\vec{a} - 2\vec{b} = (-2,3,2)$
- $|3\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{17}$

4. Na osi x poiščite točko, enako oddaljeno od točk $A(1,2,4)$ in $B(5,-3,2)$.

Rešitev. Iskano točko označimo z X, njene koordinate naj bodo $X(x,0,0)$ (ker leži na osi x). Neznano prvo koordinato x dobimo iz pogoja $|AX| = |BX|$. Vstavimo
$$|AX| = \sqrt{(x-1)^2 + (-2)^2 + (-4)^2},\ |BX| = \sqrt{(x-5)^2 + 3^2 + (-2)^2}$$
in dobimo (po kvadriranju)
$$(x-1)^2 + 20 = (x-5)^2 + 13$$
z rešitvijo $x = \frac{17}{8}$. Iskana točka je $X(\frac{17}{8},0,0)$.

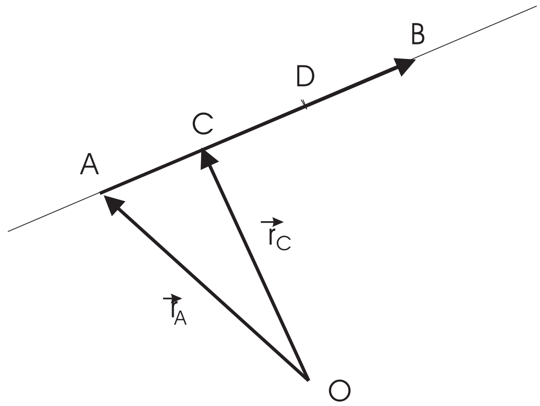
5. Na osi z poiščite točko, enako oddaljeno od točk $A(2,-2,2)$ in $B(-1,1,-1)$.

Rešitev. Iskana točka naj ima koordinate $Z(0,0,z)$. Kot zgoraj dobimo $z = \frac{3}{2}$ in $Z(0,0,\frac{3}{2})$.

6. Dani sta točki $A(3,3,3)$ in $B(0,6,9)$. Poiščite koordinate točk C in D, ki daljico AB razdelita na 3 enake dele.

Rešitev. Koordinate točke C (D) so hkrati koordinate krajevnega vektorja $\vec{r_C}$ ($\vec{r_D}$). Velja (slika (3.1)):

- $\vec{AB} = (-3,3,6)$
- $\vec{r_C} = \vec{r_A} + \frac{1}{3}\vec{AB} = (3,3,3) + (-1,1,2) = (2,4,5)$
- $\vec{r_D} = \vec{r_A} + \frac{2}{3}\vec{AB} = (3,3,3) + 2(-1,1,2) = (1,5,7)$



Slika 3.1: $\vec{r_C} = \vec{r_A} + \frac{1}{3}\vec{AB}$

7. Izračunajte obseg trikotnika z oglišči $A(-1,0,1)$, $B(2,3,4)$ in $C(-2,1,2)$.

Rešitev.

- Obseg je vsota dolžin stranic $|AB| + |AC| + |BC|$.
- $|AB| = |\vec{AB}| = \sqrt{27}$
  $|AC| = |\vec{AC}| = \sqrt{3}$
  $|BC| = |\vec{BC}|\sqrt{24}$
- Obseg: $\sqrt{27} + \sqrt{3} + \sqrt{24}$

8. Vektorja $\vec{a} = (2, 0, -2)$ in $\vec{b} = (2, -2, 0)$ določata trikotnik. Pokažite, da je ta trikotnik enakostraničen.

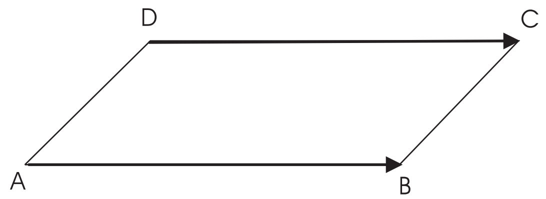
   Opomba: Trikotnik v prostoru lahko podamo s koordinatami njegovih oglišč (kot v prejšnji nalogi) ali pa z dvema (nevzporednima) vektorjema, ki predstavljata dve njegovi stranici. Vektor na tretji stranici je $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$. Lega tako podanega trikotnika v prostoru ni natanko določena. Lahko privzamemo, da je eno oglišče v izhodišču, $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pa sta krajevna vektorja drugih dveh oglišč.

   Rešitev.

   - Dolžine stranic so dolžine vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.
   - Velja: $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}| = 2\sqrt{2}$.
   - Dolžine stranic so med seboj enake, trikotnik je enakostraničen.

9. Dane so točke $A(-1, 0, 2), B(2, 1, 2)$ in $C(4, -3, 3)$. Določite koordinate točke D tako, da bo $ABCD$ paralelogram. Izračunajte obseg in dolžini diagonal tega paralelograma.

   Rešitev. Oglišča paralelograma označimo (ponavadi) po vrsti v pozitivni smeri (smeri nasprotni urinemu kazalcu) z A, B, C, D (slika (3.2)). Vidimo, da sta vektorja $\vec{AB}$ in $\vec{DC}$ enaka (ista dolžina, ista smer). Iz tega pogoja dobimo enačbe za neznane koordinate točke $D(x, y, z)$.



Slika 3.2: paralelogram A, B, C, D

   - Enaka vektorja $\vec{AB} = (3, 1, 0)$ in $\vec{DC} = (4 - x, -3 - y, 3 - z)$ imata enake koordinate - torej:
     $4 - x = 3, x = 1; -3 - y = 1, y = -4; 3 - z = 0, z = 3.$
   - Iskana točka: $D(1, -4, 3)$

- Obseg: $2|AB| + 2|BC| = 2(\sqrt{10} + \sqrt{21})$
- Dolžini diagonal: $|BD| = \sqrt{27}, |AC| = \sqrt{35}$

10. Vektorja $\vec{a} = (-1, 2, 1)$ in $\vec{b} = (3, 2, 4)$ določata paralelogram. Izračunajte dolžini diagonal tega paralelograma.

    Opomba: Tako kot trikotnik lahko tudi paralelogram določimo z dvema nevzporednima vektorjema, ki ležita na nevzporednih stranicah paralelograma.

    Rešitev.

    - Vektorja na diagonalah paralelograma sta $\vec{a} - \vec{b} = (-4, 0, -3)$ in $\vec{a} + \vec{b} = (2, 4, 5)$.
    - Njuni dolžini sta $|\vec{a} - \vec{b}| = 5$ in $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{45}$.

3.2 Produkti, linearna kombinacija

11. Izračunajte skalarni produkt vektorjev $\vec{a} = (-1, 0, 1)$ in $\vec{b} = (19, 20, 21)$.

Rešitev. Skalarni produkt vektorjev je vsota produktov njunih istoležnih koordinat:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \cdot 19 + 0 \cdot 20 + 1 \cdot 21 = 2.$$

12. Izračunajte skalarni produkt vektorjev $\vec{a} = (3, 4, 7)$ in $\vec{b} = (2, -5, 2)$.

Rešitev. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, kar pomeni, da sta dana vektorja pravokotna.

13. Dana sta vektorja $\vec{a} = (x, 3, 4)$ in $\vec{b} = (4, x, -7)$. Pri kateri vrednosti števila x sta dana vektorja pravokotna?

Rešitev.

- Izračunamo skalarni produkt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7x - 28$.
- Zaradi pravokotnosti mora biti skalarni produkt enak 0, torej $7x - 28 = 0$ in $x = 4$.

14. Izračunajte kot med vektorjema $\vec{a} = (1, 2, 3)$ in $\vec{b} = (6, 4, -2)$.

Rešitev. Uporabimo enačbo $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$, če s φ označimo iskani kot. Izračunamo $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{2}{7}$, od tod $\varphi = \arccos \frac{2}{7}$.

15. Izračunajte kote trikotnika, katerega oglišča so v točkah $A(-1, 0, 1)$, $B(2, 3, 4)$ in $C(-2, 1, 2)$.

Rešitev.

- Kot pri oglišču A (oznaka α) je kot med vektorjema $\vec{AB}$ in $\vec{AC}$:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|} = \frac{1}{3},\ \alpha = \arccos\frac{1}{3}.$$

- Kot pri oglišču B (oznaka β) je kot med vektorjema $\vec{BA}$ in $\vec{BC}$:

$$\cos\beta = \frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{|\vec{BA}||\vec{BC}|} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{27}},\ \beta = \arccos\frac{\sqrt{8}}{9}.$$

- Kot pri oglišču C (oznaka γ):

$$cos\gamma = \frac{\vec{CA}\cdot\vec{CB}}{|\vec{CA}||\vec{CB}|} = 0,\ \gamma = 90^\circ.$$

Opomba: Trikotnik je pravokoten.

16. Izračinajte vektorski produkt vektorjev $\vec{a} = (2,3,5)$ in $\vec{b} = (1,2,1)$.

Rešitev.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{\imath}(3-10) - \vec{\jmath}(2-5) + \vec{k}(4-3) = (-7,3,1)$$

Opomba: Vektorski produkt je vektor. Njegova dolžina je enaka ploščini paralelograma, določenega z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$; njegova smer je pravokotna na ravnino vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ (smer desnega vijaka). Obe lastnosti bomo uporabili v naslednjih nalogah.

17. Poiščite enotski vektor $\vec{v}$, pravokoten na vektorja $\vec{a} = (1,2,3)$ in $\vec{b} = (3,2,1)$ (to je pravokoten na ravnino, v kateri ležita vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$).

Rešitev. Uporabimo drugo lastnost vektorskega produkta: vektor, pravokoten na dva dana vektorja ima smer njunega vektorskega produkta ali pa nasprotno smer njunega vektorskega produkta.

- Izračunamo vektorski produkt: $\vec{a}\times\vec{b} = (-4,8,-4)$.

- Poiščemo enotski vektor ($\vec{e}$) v smeri vektorja $\vec{a}\times\vec{b}$: $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{96}}(-4, 8, -4)$.
- Iskani vektor je enak ali pa nasproten gornjemu enotskemu vektorju: $\vec{v} = \pm\vec{e} = \pm\frac{1}{\sqrt{96}}(-4, 8, -4)$.

18. Izračunajte ploščino paralelograma, določenega z vktorjema $\vec{a} = (2, 5, 1)$ in $\vec{b} = (1, 2, -3)$.

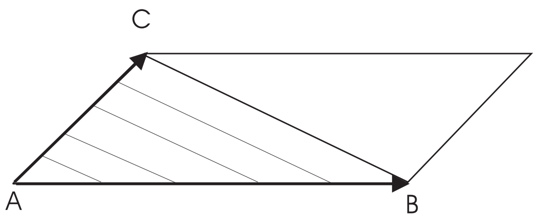
    Rešitev. Uporabimo prvo lastnost vektorskega produkta.

    - Izračunamo vektorski produkt: $\vec{a} \times \vec{b} = (-17, 7, -1)$.
    - Izračunamo njegovo dolžino: $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{339}$.
    - Iskana ploščina je enaka gornji dolžini: $p = \sqrt{339}$.

19. Izračunajte ploščino trikotnika, katerega oglišča so v točkah $A(-1, 0, 1)$, $B(2, 3, 4)$ in $C(-2, 1, 2)$.

    Rešitev. Ploščina trikotnika je enaka polovici ploščine paralelograma, določenega z vektorjema $\vec{AB}$ in $\vec{AC}$ (slika (3.3)):

$$p = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| = 3\sqrt{2}.$$



Slika 3.3: $p = \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$

20. Izračunajte ploščino trikotnika z oglišči $A(2, 2, 2), B(4, 0, 3)$ in $C(0, 1, 0)$. Izračunajte še vse višine tega trikotnika.

    Rešitev.

- Kot zgoraj izračunamo ploščino: $p = \frac{\sqrt{65}}{2}$
- Višino iz oglišča C (oznaka v_C) izračunamo z uporabo geometrijske formule za ploščino trikotnika:

$$p = \frac{1}{2}|AB|v_C,$$

torej

$$v_C = \frac{2p}{|AB|} = \frac{\sqrt{65}}{3}.$$

- Podobno izračunamo ostali višini:

$$v_B = \frac{2p}{|AC|} = \frac{\sqrt{65}}{3}$$

$$v_A = \frac{2p}{|BC|} = \sqrt{\frac{65}{26}}.$$

Opomba: Dani trikotnik je enakokrak ($|AB| = |AC| = 3$).

21. Izračunajte mešani produkt vektorjev $\vec{a} = (2, -1, -1), \vec{b} = (1, 3, -1)$ in $\vec{c} = (1, 1, 4)$.

Rešitev.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 33$$

Opomba: Mešani produkt treh vektorjev je skalar. Njegova absolutna vrednost je enaka volumnu paralelepipeda, določenega z vektorji $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$; predznak predstavlja orientacijo.

22. Izračunajte volumen paralelepipeda, določenega z vektorji $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$ in $\vec{c} = (2, 3, 4)$.

Rešitev. Uporabimo omenjeno lastnost mešanega produkta.

- Izračunamo mešani produkt danih vektorjev: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 4$.

- Iskani volumen je enak gornjemu mešanemu produktu: $V = 4$.

23. Ali so vektorji $\vec{a} = (7, -3, 2)$, $\vec{b} = (3, -7, 8)$ in $\vec{c} = (1, -1, 1)$ koplanarni?

    Rešitev. Če so trije vektorji koplanarni (to je, ležijo v isti ravnini), določajo paralelepiped volumna 0. Torej je njihov mešani produkt enak vrednosti 0.

    - Izračunamo mešani produkt: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$.
    - Mešani produkt je enak 0, dani vektorji so koplanarni.

24. Izračunajte volumen tetraedra z oglišči $A(2, 2, 2), B(4, 3, 3), C(4, 5, 4)$ in $D(5, 5, 6)$.

    Rešitev.

    - Poiščemo vektorje na stranicah tetraedra, ki izhajajo iz enega od oglišč, na primer iz oglišča A:
      $\vec{AB} = (2, 1, 1)$
      $\vec{AC} = (2, 3, 2)$
      $\vec{AD} = (4, 3, 4)$.
    - Izračunamo mešani produkt: $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = 7$.
    - Volumen paralelepipeda, določenega z vektorji $\vec{AB}, \vec{AC}$ in $\vec{AD}$ je $|(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})| = 7$.
    - Iz geometrije vemo, da je volumen tetraedra je enak šestini volumna paralelepipeda, določenega z vektorji $\vec{AB}, \vec{AC}$ in $\vec{AD}$:

    $$V = \frac{1}{6}|(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})| = \frac{7}{6}.$$

25. Izračunajte volumen tetraedra z oglišči $A(0, 0, 1), B(2, 3, 5), C(6, 2, 3)$ in $D(3, 7, 2)$. Izračunajte še vse višine tega tetraedra.

    Rešitev.

- Kot zgoraj izračunamo volumen: $V = 20$.
- Višino iz oglišča A (oznaka v_A) izračunamo z uporabo geometrijske formule za volumen tetraedra
$$V = \frac{1}{3} p_{\Delta BCD} v_A,$$
kjer $p_{\Delta BCD}$ predstavlja ploščino trikotnika (računamo jo kot v nalogi 19) z oglišči B, C in D. Torej
$$v_A = \frac{3V}{p_{\Delta BCD}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 20}{\sqrt{510}} = \frac{4\sqrt{510}}{17}.$$
- Podobno izračunamo ostale višine:
$$v_B = \frac{3V}{p_{\Delta ACD}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 20}{\sqrt{1440}} = \sqrt{10}$$
$$v_C = \frac{3V}{p_{\Delta ABD}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 20}{\sqrt{750}} = \frac{12\sqrt{750}}{75}$$
$$v_D = \frac{3V}{p_{\Delta ABC}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 20}{\sqrt{600}} = 2\sqrt{6}$$

26. Preverite, ali točke $A(5, 7, -2), B(3, 1, -1), C(9, 4, -4)$ in $D(1, 5, 0)$ ležijo v isti ravnini.

Rešitev. Štiri točke, ki ležijo v isti ravnini, določajo tetraeder volumna enakega 0. Torej je volumen paralelepipeda z robovi $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ in $\vec{AD}$ enak 0.

- Izračunamo mešani produkt: $(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = 0$.
- Mešani produkt (torej tudi volumen paralelepipeda) je enak 0, točke ležijo v isti ravnini.

27. Izrazite vektor $\vec{d} = (8, 6, 4)$ z vektorji $\vec{a} = (1, -2, 1), \vec{b} = (3, 2, 1)$ in $\vec{c} = (1, 0, -1)$.

Rešitev. Izraziti $\vec{d}$ z vektorji $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ pomeni zapisati $\vec{d}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$:

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Zapišemo to enakost v koordinatah

$$(8, 6, 4) = \alpha(1, -2, 1) + \beta(3, 2, 1) + \gamma(1, 0, -1)$$

in dobimo sistem enačb

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 3\beta & + & \gamma & = & 8 \\ -2\alpha & + & 2\beta & & & = & 6 \\ \alpha & + & \beta & - & \gamma & = & 4 \end{array}$$

z rešitvijo $\alpha = 0, \beta = 3, \gamma = -1$.
Vektor $\vec{d}$, zapisan z vektorji $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$: $\vec{d} = 3\vec{b} - \vec{c}$

28. Vektor $\vec{d} = (13, -10, 17)$ zapišite kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a} = (3, 1, -1)$, $\vec{b} = (2, -5, 7)$ in $\vec{c} = (-1, -3, 2)$.

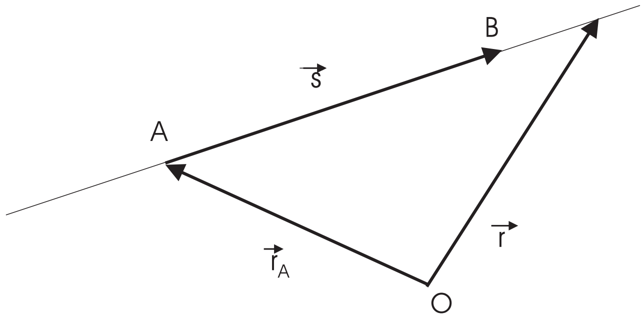
Rešitev. Kot zgoraj dobimo $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

3.3 Premica in ravnina v prostoru

29. Zapišite vse tri oblike enačbe premice skozi točki $A(1,0,2)$ in $B(2,-1,0)$.

Rešitev.

(a) Enačbo poiščemo najprej v vektorski obliki (slika (3.4)):



Slika 3.4: $\vec{r} = \vec{r_A} + t\vec{s}$

- Izberemo krajevni vektor neke znane točke na premici (na primer točke A): $\vec{r_A} = (1,0,2)$.
- Smerni vektor premice $\vec{s}$ je enak vektorju $\vec{AB}$, ki leži na premici: $\vec{s} = \vec{AB} = (1,-1,-2)$.
- Krajevni vektor poljubne točke na premici $\vec{r}$ ustreza enačbi - vektorski obliki enačbe premice:

$$\vec{r} = \vec{r_A} + t\vec{s} = (1,0,2) + t(1,-1,-2),\ t \in \mathbb{R}.$$

(b) Zapis po koordinatah (če so x, y, z koordinate vektorja $\vec{r}$) da parametrično obliko:

$$\begin{aligned} x &= 1+t \\ y &= -t \\ z &= 2-2t, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(c) Eliminacija parametra t da kanonsko obliko:

- iz prve enačbe: $t = x - 1$
- iz druge enačbe: $t = -y$
- iz tretje enačbe: $t = \frac{z-2}{2}$

$$x-1=-y=\frac{z-2}{2}$$

30. Dana je premica z enačbo $x-2=\frac{y+1}{3}=-z$.

    (a) Zapišite enačbo dane premice v parametrični obliki.

    (b) Poiščite 3 točke, ki ležijo na dani premici.

    (c) Zapišite enačbo dane premice v vektorski obliki.

Rešitev.

(a) Postavimo $x-2=\frac{y+1}{3}=-z=t$ (t je parameter) in izračunamo:
$x-2=t, x=2+t$
$\frac{y+1}{3}=t, y=-1+3t$
$z=-t$.
S prepisom gornjih enačb dobimo parametrično obliko:

$$\begin{aligned} x &= 2+t \\ y &= -1+3t \\ z &= -t, \quad t\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

(b) Pri različnih vrednostih parametra t dobimo iz gornjih enačb koordinate tazličnih točk $T(x,y,z)$ na premici, na primer:
za $t=0$ dobimo točko $A(2,-1,0)$,
za $t=1$ dobimo točko $B(3,2,-1)$,
za $t=-1$ dobimo točko $C(1,-4,1)$.

(c) Gornje enačbe prepišemo v vektorski obliki:

$$(x,y,z)=(2,-1,0)+t(1,3,1)$$

ali

$$\vec{r}=\vec{r_A}+t\vec{s},$$

kjer je $\vec{r}=(x,y,z)$ krajevni vektor poljubne točke na premici,
$\vec{r_A}$ krajevni vektor točke A,
$\vec{s}$ pa vektor, ki leži na premici - smerni vektor.

31. Zapišite enačbo premice, ki vsebuje točko $T(1, 0, -1)$ in je vzporedna vektorju $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

Rešitev. Smerni vektor iskane premice je enak danemu vektorju: $\vec{s} = \vec{v}$. Kot v gornji nalogi dobimo

- vektorsko obliko: $\vec{r} = \vec{r_T} + t\vec{s},\ t \in \mathbb{R}$
- parametrično obliko:
$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= t \\ z &= -1, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
- kanonsko obliko:
$$\frac{x-1}{2} = y,\ z = -1.$$
Opomba: Smerni vektor ima koordinato v smeri osi enako 0, zato parametra t iz tretje enačbe nismo mogli izraziti in enačba v strogi kanonski obliki ne obstaja.

32. Zapišite enačbo ravnine, ki vsebuje točko $T(2, 3, 5)$ in je pravokotna na vektor $\vec{n} = (4, 3, 2)$.

Rešitev. Uporabimo enačbo $(\vec{r} - \vec{r_T}) \cdot \vec{n} = 0$, če je $\vec{r}$ krajevni vektor poljubne točke na ravnini, $\vec{r_T}$ krajevni vektor dane točke na ravnini in $\vec{n}$ normalni vektor na ravnino (slika (3.5)):

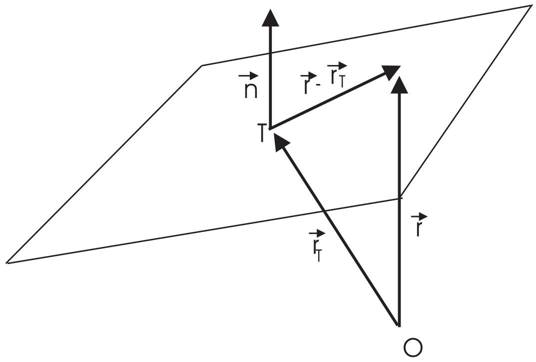
$$(\vec{r} - \vec{r_T}) \cdot \vec{n} = 0$$
$$(x - 2, y - 3, z - 5) \cdot (4, 3, 2) = 0$$

in po izračunu

$$4x + 3y + 2z - 27 = 0.$$

33. Zapišite enačbo ravnine, ki vsebuje točko $T(3, -5, 1)$ in je vzporedna ravnini z enačbo $2x + y + 8z = 10$.

Rešitev.



Slika 3.5: $(\vec{r} - \vec{r_T}) \cdot \vec{n} = 0$

- Normala iskane ravnine je enaka normali dane ravnine: $\vec{n} = (2, 1, 8)$.
- Kot v gornji nalogi dobimo enačbo iskane ravnine: $2x + y + 8z = 9$.

34. Zapišite enačbo ravnine, ki vsebuje točko $T(2, 3, -1)$ in je pravokotna na premico z enačbo $\frac{x-5}{5} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-2}{2}$.

Rešitev.

- Normala iskane ravnine je enaka smernemu vektorju dane premice: $\vec{n} = \vec{s} = (5, -3, 2)$.
- Enačba iskane ravnine: $5x - 3y + 2z + 1 = 0$.

35. Zapišite enačbo ravnine, ki vsebuje točke $A(2, -1, 4)$, $B(3, 2, -1)$ in $C(3, 0, 6)$.

Rešitev.

- Potrebujemo normalo iskane ravnine - to je vektor, pravokoten na vektorja $\vec{AB}$ in $\vec{AC}$, ki ležita v ravnini. Vektor, pravokoten na dva dana vektorja računamo z vektorskim produktom (glejte nalogo 17):

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (11, -7, -2).$$

- Enačba ravnine: $11x - 7y - 2z = 21$.

36. Določite koordinate presečišča premice $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{5} = z - 1$ in ravnine $2x + 3y + z = 14$.

Rešitev.

- Parametrična oblika enačbe premice da koordinate poljubne točke na premici:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= -3 + 5t \\ z &= 1 + t, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Vstavimo jih v enačbo ravnine (koordinate presečišča morajo ustrezati obema - enačbi premice in enačbi ravnine):

$$2(1 + 2t) + 3(-3 + 5t) + (1 + t) = 14.$$

- Iz gornje enačbe izračunamo vrednost parametra t: $t = 1$.
- Izračunano vrednost paramera t vstavimo v (parametrično) enačbo premice in dobimo koordinate presečišča - točke P:
  $x = 1 + 2 = 3$
  $y = -3 + 5 = 2$
  $z = 1 + t = 2$
  presečišče $P(3, 2, 2)$.

37. Določite presek ravnin $2x + 3y - z = -1$ in $x - y + z = 8$.

Rešitev. Točke, ki so v preseku ravnin morajo ustrezati obema enačbama, torej morajo rešiti sistem enačb

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= -1 \\ x - y + z &= 8 \end{aligned}.$$

Rešitev sistema je: $x = t$, $y = \frac{7-3t}{2}$, $z = \frac{23-5t}{2}$ $(t \in \mathbb{R})$,
kar je parametrična enačba premice

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= \frac{7}{2} - \frac{3}{2}t \\ z &= \frac{23}{2} - \frac{5}{2}t, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Poglavje 4

Zaporedja in vrste

4.1 Zaporedja

1. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{n+3}{n}$.

   (a) Zapišite prvih pet členov tega zaporedja in skicirajte njegov graf.

   (b) Ali je dano zaporedje monotono (naraščajoče/padajoče)?

   (c) Ali je dano zaporedje omejeno?

   (d) Izračunajte limito danega zaporedja.

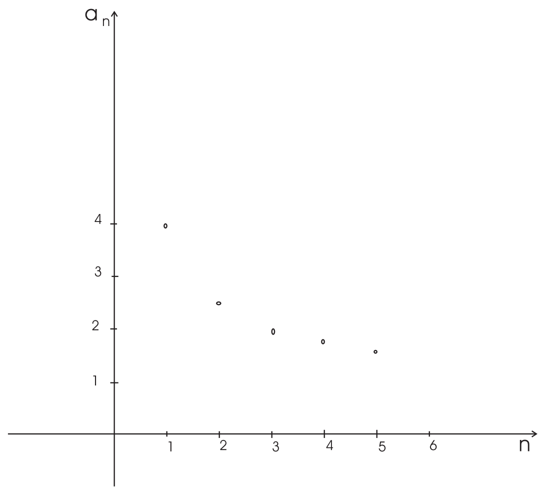
   (e) Poiščite natančni meji $(\inf\{a_n\}, \sup\{a_n\})$ danega zaporedja.

Rešitev.

(a) $a_1 = \frac{1+3}{1} = 4$
$a_2 = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$
$a_3 = \frac{3+3}{3} = 2$
$a_4 = \frac{4+3}{4} = \frac{7}{4}$
$a_5 = \frac{5+3}{5} = \frac{8}{5}$
Graf zaporedja je na sliki (4.1).
Opomba: Graf zaporedja sestavljajo (nepovezane) točke s koordinatama $(n, a_n), n \in \mathbb{N}$.

(b) Zaporedje je monotono, če je razlika zaporednih členov $a_{n+1} - a_n$ konstantnega predznaka.

- Izračunamo razliko: $a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)+3}{n+1} - \frac{n+3}{n} = \frac{-3}{n(n+1)}$.



Slika 4.1: $a_n = \frac{n+3}{n}$

- Dobljeni količnik je pri vsakem naravnem n negativen (negativen števec -3, pozitiven imenovalec $n(n+1)$).
- Zaporedje je monotono, je padajoče (razlika je negativna).

(c) Zaporedje je omejeno.

- Vsi členi so pozitivni, torej je navzdol omejeno. Število $S = 0$ (na primer) je spodnja meja zaporedja.
- Zaporedje je padajoče, torej je navzgor omejeno. Prvi člen zaporedja $a_1 = 4$ (na primer) je zgornja meja zaporedja.

(d) Splošni člen zaporedja a_n preoblikujemo

$$a_n = \frac{n+3}{n} = \frac{1+\frac{3}{n}}{1},$$

od koder odčitamo (z uporabo znane limite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

(e) Zaporedje je padajoče in konvergentno.

- Prvi člen zaporedja je natančna zgornja meja (oznaka M ali $\sup\{a_n\}$) zaporedja: $M = a_1$. Natančna zgornja meja pripada zaporedju.
- Limita zaporedja je natančna spodnja meja (oznaka m ali $\inf\{a_n\}$) zaporedja: $m = \lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Natančna spodnja meja ni člen zaporedja, ne pripada zaporedju.

2. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{1}{(2n-21)^2}$.

   (a) Zapišite prvih pet členov tega zaporedja.
   (b) Ali je dano zaporedje monotono (naraščajoče/padajoče)?
   (c) Ali je dano zaporedje omejeno?
   (d) Izračunajte limito danega zaporedja.
   (e) Poiščite natančni meji ($\inf\{a_n\}, \sup\{a_n\}$) danega zaporedja.

Rešitev.

(a) $a_1 = \frac{1}{19^2}, a_2 = \frac{1}{17^2}, a_3 = \frac{1}{15^2}, a_4 = \frac{1}{13^2}, a_5 = \frac{1}{11^2}$

(b)
- Izračunamo razliko: $a_{n+1} - a_n = \frac{-8n+80}{(2n-19)^2(2n-21)^2}$.
- Imenovalec je pozitiven, predznak razlike je enak predznaku števca.
- $-8n + 80 > 0$, če $n < 10$.
  Od prvega do devetega ($n < 10$) člena velja $a_{n+1} - a_n > 0$, torej je zaporedje od prvega do (vključno) desetega člena naraščajoče.
- $-8n + 80 = 0$, če $n = 10$.
  Velja $a_{11} - a_{10} = 0$, torej je enajsti člen tega zaporedja enak desetemu.
- $-8n + 80 < 0$, če $n > 10$.
  Od enajstega ($n > 10$) člena naprej velja $a_{n+1} - a_n < 0$, torej je zaporedje od enajstega člena naprej padajoče.

Opomba: Napačno je ugotavljati monotonost zaporedja na osnovi nekaj začetnih členov zaporedja. Za dano zaporedje bi po prvih petih členih napačno sklepali, da je zaporedje naraščajoče.

(c) Zaporedje je omejeno.
- Vsi členi so pozitivni, torej je zaporedje navzdol omejeno.
- Deseti oziroma enajsti člen sta največja člena zaporedja, torej je zaporedje navzgor omejeno.

(d)

$$a_n = \frac{1}{4n^2 - 84n + 441} = \frac{\frac{1}{n^2}}{4 - \frac{84}{n} + \frac{441}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(e) Glede na naraščanje in padanje zaporedja je:
$\inf\{a_n\}$ manjši izmed a_1 in $\lim_{n\to\infty} a_n$

$$\inf\{a_n\} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

$\sup\{a_n\}$ deseti oziroma enajsti člen zaporedja

$$\sup\{a_n\} = a_{10} = a_{11} = 1.$$

3. Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$.

   (a) Zapišite prvih pet členov tega zaporedja.

   (b) Ali je dano zaporedje monotono (naraščajoče/padajoče)?

   (c) Ali je dano zaporedje omejeno?

   (d) Izračunajte limito danega zaporedja.

   (e) Poiščite natančni meji $(\inf\{a_n\}, \sup\{a_n\})$ danega zaporedja.

   Rešitev.

   (a) $a_1 = \frac{2}{9}, a_2 = \frac{4}{27}, a_3 = \frac{8}{81}, a_4 = \frac{16}{243}, a_5 = \frac{32}{729}$

   (b) padajoče

   (c) je omejeno (padajoče in pozitivno)

   (d) Uporabimo znano limito $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$, če $|\alpha| < 1$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} (\frac{2}{3})^n = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

4. Koliko členov zaporedja s splošnim členom $a_n = \frac{n+3}{n}$ leži na intervalu $[1.3, 1.4]$?

   Rešitev. Poiščemo tiste člene zaporedje, ki ustrezajo neenačbama

$$1.3 \leq a_n \leq 1.4.$$

   - Rešitev sistema neenačb $1.3 \leq \frac{n+3}{n} \leq 1.4$ je: $7.5 \leq n \leq 10$.

- Naravna števila, ki ustrezajo gornji rešitvi so: 8, 9 in 10.
- Trije členi (a_8, a_9 in a_{10}) ležijo na danem intervalu.

Opomba: Dano zaporedje je zaporedje iz naloge 1.

5. Koliko členov zaporedja s splošnim členom $a_n = \frac{n+2}{2n}$ je večjih od $\frac{3}{4}$?

Rešitev. Poiščemo tiste člene zaporedje, ki ustrezajo neenačbi $a_n > \frac{3}{4}$.

- Rešitev neenačbe $\frac{n+2}{2n} > \frac{3}{4}: \quad n < 4$
- $n = 1, 2$ ali 3
- Trije členi: a_1, a_2 in a_3

6. Poiščite vse člene zaporedja $a_n = \frac{4n+3}{6n-5}$, ki ležijo v ϵ-okolici limite, če je $\epsilon = \frac{1}{5}$.

Rešitev.

- Izračunamo limito zaporedja (oznaka a)

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+3}{6n-5} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{3}{n}}{6-\frac{5}{n}} = \frac{2}{3}$$

- Rešimo neenačbo $|a_n - a| < \epsilon$

$$|\frac{4n+3}{6n-5} - \frac{2}{3}| < \frac{1}{5}$$

$$|\frac{19}{3(6n-5)}| < \frac{1}{5}$$

Izraz v absolutni vrednosti je zmeraj pozitiven, zato nadalje znak absolutne vrednosti izpustimo.

$$\frac{19}{3(6n-5)} < \frac{1}{5}$$

$$3(6n-6) > 5 \cdot 19$$

$$6n > \frac{95}{3} + 5 = 36 + \frac{2}{3}$$

$$n > 6 + \frac{2}{18}$$

- Neenačbi ustrezajo $n \geq 7$.
- V dani okolici ležijo členi od vključno sedmega člena naprej.

7. Poiščite vse člene zaporedja $a_n = \frac{3n^2+1}{5n^2-1}$, ki ležijo izven ϵ-okolice limite, če je $\epsilon = 0.01$.

Rešitev.

- $$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n^2}}{5-\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{5}$$
- Izven okolice ležijo členi, ki ustrezajo neenačbi $|a_n - a| \geq \epsilon$.
$$|\frac{3n^2+1}{5n^2-1} - \frac{3}{5}| \geq \frac{1}{100}$$
$$n^2 \leq \frac{161}{5} = 32.2$$
$$n \leq 5$$
- Izven dane okolice leži prvih pet členov zaporedja.

8. Ugotovite, ali je dano zaporedje konvergentno in izračunajte njegovo limito:

   (a) $a_n = \frac{1000}{n^2+1}$

   (b) $a_n = \frac{-2}{\sqrt{n}}$

   (c) $a_n = \frac{3n^2+204n-1}{5n^2-77n}$

   (d) $a_n = \frac{3(n-3)^2}{n+99}$

   (e) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^3+n}}{n+4}$

   (f) $a_n = \frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2}{n+1}$

   (g) $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$

   (h) $a_n = \sqrt{n^2+5n} - n$

   (i) $a_n = (-\frac{1}{2})^n$

(j) $a_n = 20 \cdot (\frac{1}{4})^n$

Rešitev. Uporabimo znani limiti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

in

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0, \text{če } |\alpha| < 1$$

ter lastnosti limit.

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(c) V nalogah (c) do (h) preoblikujemo splošni člen zaporedja tako, da števec in imenovalec delimo z $n^{(\text{stopnja imenovalca})}$.

$$a_n = \frac{(3n^2 + 204n - 1) \quad : n^2}{(5n^2 - 77n) \quad : n^2} = \frac{3 + \frac{204}{n} - \frac{1}{n^2}}{5 - \frac{77}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{5}$$

(d)

$$a_n = \frac{3n^2 - 18n + 27}{n + 99} = \frac{3n - 18 + \frac{27}{n}}{1 + \frac{99}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

(e)

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n^3 + n} \quad : \sqrt[3]{n^3}}{(n + 4) \quad : n} = \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^3}}}{1 + \frac{4}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

(f)

$$a_n = (\text{odštejemo}) = \frac{n^2(n + 1) - n^2(n - 1)}{(n - 1)(n + 1)} = \frac{2n^2}{n^2 - 1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

(g)

$$a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = (\text{odštejemo}) =$$

$$= \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \quad \cdot (\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

(h)

$$a_n = (\text{odštejemo kot zgoraj}) = \frac{5n}{\sqrt{n^2 + 5n} + n} = \frac{5}{\sqrt{1 + \frac{5}{n}} + 1}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \frac{5}{2}$$

(i) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ (ker za osnovo $\frac{-1}{2}$ velja $|-\frac{1}{2}| < 1$)

(j) $\lim_{n \to \infty} a_n = 20 \cdot \lim_{n \to \infty} (\frac{1}{4})^n = 0$

9. Izračunajte limite danih zaporedij:

   (a) $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{20n}$

   (b) $a_n = (1 - \frac{1}{n})^{-n}$

   (c) $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{3n+4}$

   (d) $a_n = (\frac{n}{n+1})^n$

Rešitev. Uporabimo znano limito

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

in lastnosti limit.

(a)

$$a_n = ((1 + \frac{1}{n})^n)^{20}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = (\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n)^{20} = e^{20}$$

(b)

$$a_n = (\frac{n-1}{n})^{-n} = (\frac{n}{n-1})^n = (1+\frac{1}{n-1})^{n-1+1} =$$

$$= (1+\frac{1}{n-1})^{n-1}(1+\frac{1}{n-1})$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n-1}) = e\cdot 1 = e$$

(c)

$$a_n = ((1+\frac{1}{n})^n)^3(1+\frac{1}{n})^4$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = (\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n)^3\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^4 = e^3\cdot 1 = e^3$$

(d)

$$a_n = (\frac{n+1}{n})^{-n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}$$

4.2 Vrste

10. Izračunajte vsote:

    (a) $\sum_{k=1}^{10}(2(k-1)+3)$

    (b) $\sum_{k=0}^{5} 4\cdot 2^k$

    (c) $\sum_{k=5}^{20}(\frac{3(k+3)}{8}-\frac{3^k}{243})$

Rešitev.

(a) Sešteti moramo 10 členov aritmetičnega zaporedja s prvim členom $a_1 = 2(1-1)+3 = 3$, zadnjim členom $a_{10} = 2(10-1)+3 = 21$ in razliko $d = 2$. Vsota je enaka

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2}\cdot 10 = 120.$$

(b) Sešteti moramo 6 členov geometrijskega zaporedja s prvim členom $a_1 = 4\cdot 2^0 = 4$, zadnjim členom $a_6 = 4\cdot 2^5 = 128$ in količnikom $q = 2$. Vsota je enaka

$$S_6 = a_1\frac{q^7-1}{q-1} = 508$$

(c) Vsoto zapišemo kot

$$\sum_{k=5}^{20}\frac{3(k+3)}{8} - \sum_{k=5}^{20}\frac{3^k}{243}.$$

- Prva vsota predstavlja 16 členov aritmetičnega zaporedja s prvim členom (ko je $k=5$) $a_1 = 3$, zadnjim členom ($k=20$) $a_{16} = \frac{69}{8}$, razliko $d = \frac{3}{8}$ in vsoto $S_{16} = 93$.
- Druga vsota predstavlja 16 členov geometrijskega zaporedja s prvim členom $a_1 = 1$, zadnjim členom $a_{16} = 3^{15}$, količnikom $q = 3$ in vsoto $S_{16} = \frac{3^{16}-1}{2}$.
- $\sum_{k=5}^{20}(\frac{3(k+3)}{8}-\frac{3^k}{243}) = 93 - \frac{3^{16}-1}{2}$

11. Izračunajte vsoto geometrijske vrste.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{5}{2})^{-k}$

Rešitev. Geometrijska vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1}$ je konvergentna, če je količnik zaporednih členov $|q| < 1$; njena vsota (oznaka S) je

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1} = \frac{a_1}{1-q}.$$

(a) $a_1 = \frac{-1}{2},\ q = \frac{-1}{2},\ S = \frac{\frac{-1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$

(b) $a_1 = \frac{2}{5},\ q = \frac{2}{5},\ S = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{2}{3}$

12. Preverite, da je dana vrsta konvergentna geometrijska vrsta in izračunajte njeno vsoto.

(a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots$

(b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \cdots$

Rešitev. Dana vrsta konvergentna geometrijska vrsta, če velja:

- $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$
- $|\frac{a_2}{a_1}| < 1$

V tem primeru označimo $\frac{a_2}{a_1} = q$ in izračunamo vsoto S po gornji formuli.

(a) $a_1 = 1,\ q = \frac{1}{3},\ S = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

(b) $a_1 = \frac{1}{2},\ q = \frac{-1}{2},\ S = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

13. Ugotovite, ali sta dani vrsti konvergentni:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3k+7}$

(b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k^2-1}$

Rešitev.

(a) Če je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentna, potem velja $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Za dano vrsto velja $\lim_{k\to\infty} a_k = \frac{1}{3} \neq 0$, torej vrsta ni konvergentna.

(b) Dano vrsto členoma primerjamo z znano harmonično vrsto $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$, ki ni konvergantna. Za vsak člen k velja:

$$a_k = \frac{k}{k^2-1} > \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}.$$

Vsak člen dane vrste je večji od ustreznega člena znane divergentne vrste, torej je tudi dana vrsta divergentna (primerjalni kriterij).

14. Z uporabo kvocientnega (D'Alembertovega) kriterija ugotovite, ali so dane vrste konvergentne:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+3}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{101^k}{k!}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2000k}{2^k}$

Rešitev. Ugotavljanje konvergence vrst s pozitivnimi členi z uporabo kvocientnega kriterija:

- izračunamo limito (oznaka L) dveh zaporednih členov vrste (če obstaja)
$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L$$
- če $L < 1$, vrsta konvergira
če $L > 1$, vrsta divergira
če $L = 1$, kvocientni kriterij ne da odgovora o konvergenci vrste

(a) $L = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+1}{(k+1)^3+3}}{\frac{k}{k^3+3}} = 1$, ni odgovora

(b) $L = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{101^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{101^k}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{101}{k+1} = 0 < 1$, konvergira

(c) $L = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2000(k+1)}{2^{k+1}}}{\frac{2000k}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2} < 1$, konvergira

15. Z uporabo korenskega (Cauchyjevega) kriterija ugotovite, ali so dane vrste konvergentne:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{k-1}{3k-2})^k$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{k}{k+1})^{k^2}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{k^2-1}-k)^k$

Rešitev. Ugotavljanje konvergence vrst s pozitivnimi členi z uporabo korenskega kriterija:

- izračunamo limito (oznaka L) k-tega korena iz k-tega člena (če obstaja)
$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=L$$
- če $L<1$, vrsta konvergira
če $L>1$, vrsta divergira
če $L=1$, korenski kriterij ne da odgovora o konvergenci vrste

(a) $L=\lim_{k\to\infty}\frac{k-1}{3k-2}=\frac{1}{3}<1$, konvergira

(b) $L=\lim_{k\to\infty}(\frac{k}{k+1})^k=$ (naloga 9.c) $=\frac{1}{e}<1$, konvergira

(c) $L=\lim_{k\to\infty}(\sqrt{k^2-1}-k)=$ (računamo kot nalogi 8.g in f) $=0$, $0<1$, konvergira

16. Ugotovite, ali sta dani (alternirajoči) vrsti konvergentni. Ali sta absolutno konvergentni?

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k}$

(b) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k k}{k^2-1}$

Rešitev.

- Alternirajoča vrsta $\pm\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ ($a_k>0$) je konvergentna, če
  - je zaporedje $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ padajoče
  - je $\lim_{k\to\infty}a_k=0$

- Alternirajoča vrsta $\pm\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ $(a_k > 0)$ je absolutno konvergentna, če je konvergentna vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Absolutno konvergenco preverimo po enem od gornjih kriterijev.

(a)
- Zaporedje $\{\frac{1}{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ je padajoče, $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k} = 0$, vrsta je konvergentna.
- Vrsta ni absolutno konvergentna; $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ je harmonična vrsta, ki ni konvergentna (naloga 13.b).

(b)
- Zaporedje $\{\frac{k}{k^2-1}\}_{k\geq 2}$ je padajoče, $\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k^2-1} = 0$, vrsta je konvergentna.
- Vrsta ni absolutno konvergentna; $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k}{k^2-1}$ ni konvergentna (naloga 13.b).

Poglavje 5

Funkcije ene spremenljivke

1. Naj bo $f(x) = 2 + xe^{\frac{3}{x^2}}$. Izračunajte: $f(1)$, $f(0)$, $f(\sqrt{3})$.

   Rešitev. Ni težko preveriti, da je

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 + 1 \cdot e^{\frac{3}{1^2}} = 2 + e^3 \\ f(\sqrt{3}) &= 2 + \sqrt{3}e^{\frac{3}{(\sqrt{3})^2}} = 2 + \sqrt{3}e^{\frac{3}{3}}. \end{aligned}$$

   V točki $x = 0$ funkcija f ni definirana.

2. Zapišite definicijsko območje funkcije:

   (a) $f(x) = \sqrt{x+7}$
   (b) $f(x) = \frac{3+2x}{4-x^2}$
   (c) $f(x) = 4\ln(x^2 - 9)$
   (d) $f(x) = 2\arctan(1 - x^2)$
   (e) $f(x) = 5\ln(3 - \sqrt{2x+4})$

   Rešitev.

   (a) Ker mora biti $x + 7 \geq 0$, je $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -7\}$.
   (b) Ker mora biti $4 - x^2 \neq 0$, je $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.
   (c) Ker mora biti $x^2 - 9 > 0$, je $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ in } x > 3\}$.
   (d) V tem primeru je $D_f = \mathbb{R}$.

(e) Ker mora biti $3-\sqrt{2x+4}>0$ in $2x+4\geq 0$, je $D_f=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq -2 \text{ in } x<\frac{5}{2}\}$.

3. Dani sta funkciji $f(x)=-3x+2$ in $g(x)=5x^2+3$. Zapišite funkcije:

   (a) $(f+g)(x)$

   (b) $(f\circ g)(x)$

   (c) $(g\circ f)(x)$

Rešitev.

   (a) $(f+g)(x)=g(x)+g(x)=-3x+2+5x^2+3=5x^2-3x+5$

   (b) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(x^2+1)=-3(5x^2+3)+2=-15x^2-9$

   (c) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(-3x+2)=5(-3x+2)^2+3=5(9x^2-12x+4)+3=45x^2-60x+20$

4. Ali so funkcije sode ali lihe?

   (a) $f(x)=6x^5-2x^3+7x$

   (b) $f(x)=\frac{2x}{11x^2-3x-1}$

   (c) $f(x)=x^2e^{3x^2}$

Rešitev.

   (a) Funkcija f je liha, saj je $f(-x)=-f(x)$:

$$\begin{aligned}f(-x) &= 6(-x)^5-2(-x)^3+7(-x)\\ &= -6x^5+2x^3-7x\\ &= -(6x^5-2x^3+7x)\\ &= -f(x)\end{aligned}$$

(b) Vidimo, da je

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{2(-x)}{11(-x)^2 - 3(-x) - 1} \\ &= \frac{-2x}{11x^2 + 3x - 1}. \end{aligned}$$

Funkcija f ni niti soda niti liha, saj $f(-x) \neq f(x)$ in $f(-x) \neq -f(x)$.

(c) Ni težko preveriti, da je

$$f(-x) = (-x)^2 e^{3(-x)^2} = x^2 e^{3x^2} = f(x).$$

Iz tega sledi, da je funkcija soda, saj je $f(-x) = f(x)$.

5. Skicirajte graf funkcije:

(a) $f(x) = -2x^2 + 3$

(b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

(c) $f(x) = e^{-(x+1)} + 1$

(d) $f(x) = \ln(3x - 2)$

(e) $f(x) = -2\sin(x - \frac{\pi}{3})$

(f) $f(x) = \cos(4x)$

Rešitev. Če poznamo graf funkcije, podane s predpisom $f(x)$, dobimo graf funkcije, podane s predpisom

- $-f(x)$, z zrcaljenjem preko osi x
- $f(-x)$, z zrcaljenjem preko osi y
- $kf(x), (k > 0)$, z raztegom za faktor k po osi y
- $f(kx), (k > 0)$, z raztegom za faktor $1/k$ po osi x
- $f(x) + a$, s premikom po osi y za a
  - navzgor, če $a > 0$
  - navzdol, če $a < 0$
- $f(x + a)$, s premikom po osi x za a

– v levo, če $a > 0$
– v desno, če $a < 0$

Tako postopoma pridemo do grafa želene funkcije.

(a)
- Parabolo $y = x^2$ raztegnemo za faktor 2 po osi y (dobimo graf $y = 2x^2$).
- Dobljeni graf zrcalimo preko osi x (dobimo graf $y = -2x^2$).
- Dobljeni graf premaknemo za 3 navzgor (dobimo graf želene funkcije $f(x) = -2x^2 + 3$).

Graf je na sliki (5.1).

(b) Hiperbolo $y = \frac{1}{x}$ premaknemo za 2 proti desni.
Graf je na sliki (5.2).

(c)
- Graf eksponentne funkcije $y = e^x$ zrcalimo preko osi y ($y = e^{-x}$),
- premaknemo za 1 proti levi ($y = e^{-(x+1)}$)
- in za 1 navzgor.

Graf je na sliki (5.3).

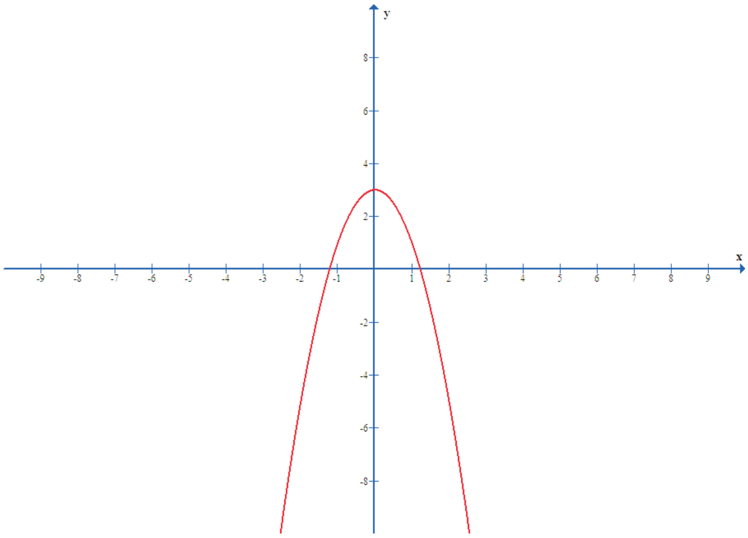
(d) Dano funkcijo zapišimo kot $f(x) = \ln 3(x - \frac{2}{3})$.
- Po osi x jo skrčimo za faktor 3 ($y = \ln(3x)$)
- in premaknemo za $\frac{2}{3}$ v desno.

Graf je na sliki (5.4).

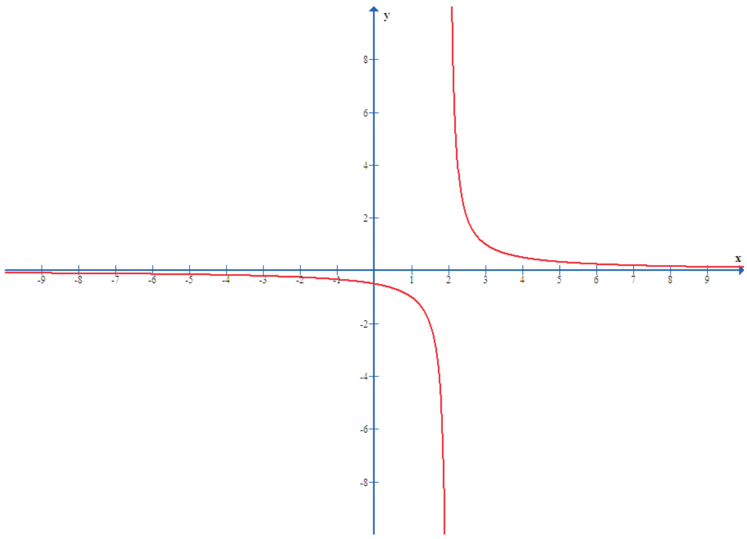
(e)
- Graf funkcije $y = \sin x$ zrcalimo čez os x in raztegnemo za faktor 2 po osi y ($y = -2\sin x$),
- nato pa premaknemo za $\frac{\pi}{3}$ v desno.

Graf je na sliki (5.5).

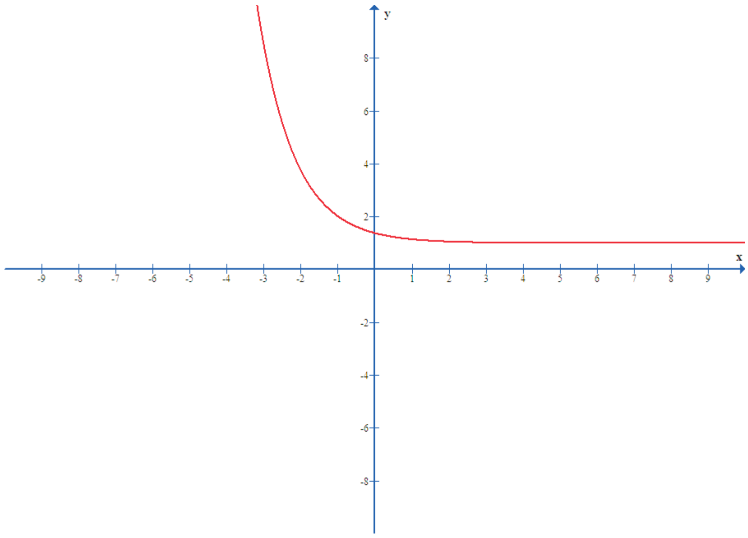
(f) Graf funkcije $y = \cos x$ skrčimo za faktor 4 po osi x.
Graf je na sliki (5.6).



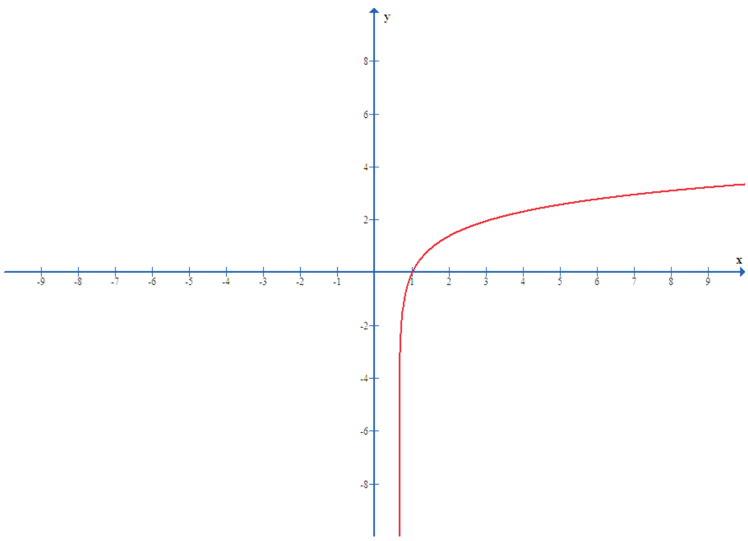
Slika 5.1: $f(x) = -2x^2 + 3$



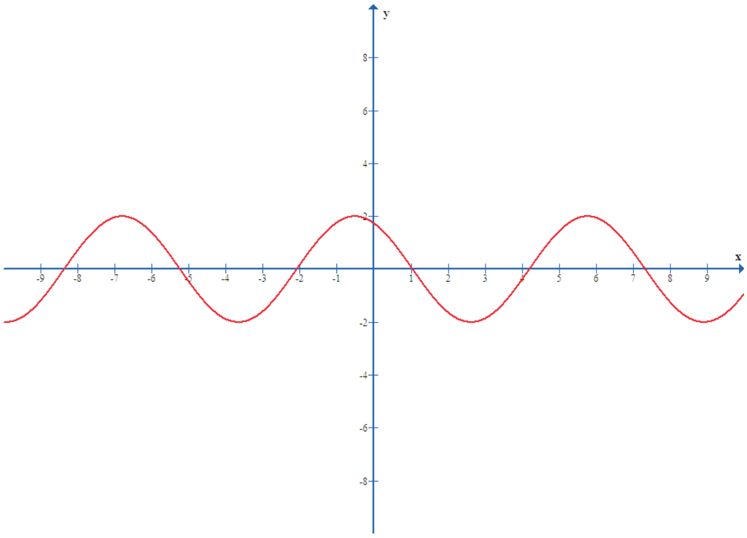
Slika 5.2: $f(x) = \frac{1}{x-2}$



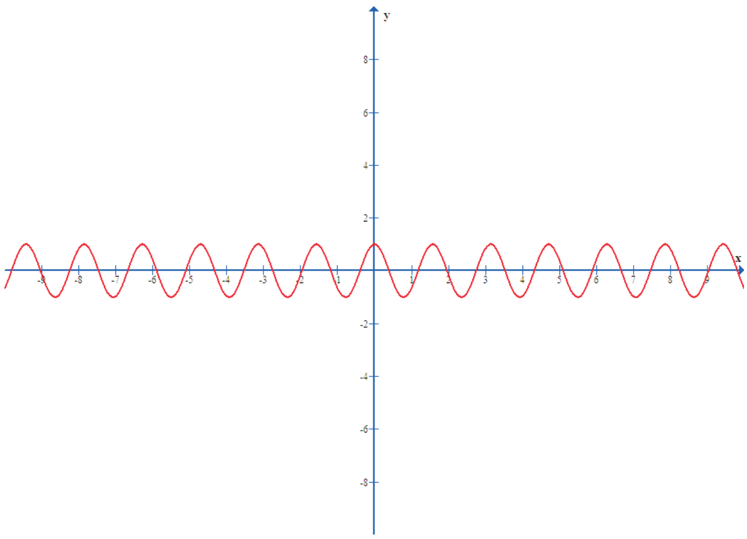
Slika 5.3: $f(x) = e^{-(x+1)} + 1$



Slika 5.4: $f(x) = \ln(3x - 2)$



Slika 5.5: $f(x) = -2\sin(x - \frac{\pi}{3})$



Slika 5.6: $f(x) = \cos(4x)$

6. Zapišite predpis inverzne funkcije dani funkciji:

   (a) $f(x) = x^3 + 7$
   (b) $f(x) = \ln(5x)$
   (c) $f(x) = 2e^{-x+2} + 2$

Rešitev.

(a)
- Funkcijo prepišemo v obliki $y = x^3 + 7$.
- Zamenjamo spremenljivki x in y: $x = y^3 + 7$.
- Rešitev enačbe da iskani predpis: $y = \sqrt[3]{x-7}$.

(b) $y = \ln(5x), \quad x = \ln(5y), \quad y = \frac{1}{5}e^x$

(c) $y = 2e^{-x+2} + 2, \quad x = 2e^{-y+2} + 2, \quad y = -\ln(\frac{x}{2} - 1) + 2$

7. Izračunajte:

   (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-707x}{7x^2+707}$
   (b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2^3}{3x^3-2x}$

Rešitev.

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ računamo po enakih pravilih kot limito zaporedja, torej $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-707x}{7x^2+707} = \frac{1}{7}$.

(b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ računamo kot $\lim_{x\to\infty} f(-x)$. V danem primeru torej $\lim_{x\to\infty} \frac{-x^3+2^3}{-3x^3+2x} = \frac{1}{3}$.

8. Izračunajte:

   (a) $\lim_{x\to3} \frac{x^2-9}{x-3}$
   (b) $\lim_{x\to2}(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8})$
   (c) $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{5x}$
   (d) $\lim_{x\to5} \frac{1-\sqrt{x-4}}{x^2-25}$
   (e) $\lim_{x\to4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$

Rešitev. Limite so:

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} &= \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}\\ &= \lim_{x\to 3}(x+3)=6\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right) &= \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{(x-2)(x^2+2x+4)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)}\\ &= \lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(c) Izraz $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{5x}$ razširimo s $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{5x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{5x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1+x-(1-x)}{5x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2}{5(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\ &= \frac{1}{5}\end{aligned}$$

(d) Racionaliziramo števec in upoštevamo zvezo $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 5} \frac{1-\sqrt{x-4}}{x^2-25} &= \lim_{x\to 5} \frac{(1-\sqrt{x-4})(1+\sqrt{x-4})}{(x^2-25)(1+\sqrt{x-4})} \\
&= \lim_{x\to 5} \frac{1-(x-4)}{(x^2-25)(1+\sqrt{x-4})} \\
&= \lim_{x\to 5} \frac{5-x}{(x-5)(x+5)(1+\sqrt{x-4})} \\
&= \lim_{x\to 5} \frac{-(x-5)}{(x-5)(x+5)(1+\sqrt{x-4})} \\
&= \lim_{x\to 5} \frac{-1}{(x+5)(1+\sqrt{x-4})} \\
&= -\frac{1}{10}
\end{aligned}$$

(e) Racionaliziramo števec in imenovalec

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} &= \lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}} \cdot \frac{3+\sqrt{5+x}}{3+\sqrt{5+x}} \cdot \frac{1+\sqrt{5-x}}{1+\sqrt{5-x}} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{9-(5+x)}{1-(5-x)} \cdot \frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{4-x}{-4+x} \cdot \frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}} \\
&= \lim_{x\to 4} (-1) \cdot \frac{1+\sqrt{5-x}}{3+\sqrt{5+x}} \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

9. Izračunajte:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(6x)}{x}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin(7x)}$

(c) $\lim_{x\to 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+5x)}{8x}$

Rešitev.

(a) Vidimo, da je
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(6x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin(6x)}{6x}.$$
Naj bo $6x=t$ in upoštevajmo, da je $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Potem je
$$\lim_{x\to 0}\frac{6\sin(6x)}{6x}=\lim_{t\to 0}\frac{6\sin t}{t}=6\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=6.$$

(b) Vidimo, da je
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin(7x)}=2\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(7x)}=2\lim_{x\to 0}\frac{7x}{7\sin(7x)}.$$
Naj bo $7x=t$. Potem je
$$2\lim_{x\to 0}\frac{7x}{7\sin(7x)}=2\lim_{t\to 0}\frac{t}{7\sin t}=\frac{2}{7}\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=\frac{2}{7}.$$

(c) Vidimo, da je
$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{3}{3x}}.$$
Naj bo $3x=t$ in upoštevajmo, da je $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$. Potem je
$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{3}{3x}}=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{3}{t}}=\lim_{t\to 0}((1+t)^{\frac{1}{t}})^3=e^3.$$

(d) Vidimo, da je
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{8x}=\frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}=\frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\frac{5\ln(1+5x)}{5x}.$$
Naj bo $5x=t$ in upoštevajmo, da je $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$. Potem je
$$\frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\frac{5\ln(1+5x)}{5x}=\frac{1}{8}\lim_{t\to 0}\frac{5\ln(1+t)}{t}=\frac{5}{8}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=\frac{5}{8}.$$

10. Funkcija f je podana s predpisom
$$f(x,y)=\begin{cases}-2x-3; & x<0\\ 0; & x=0\\ x-3; & x>0\end{cases}$$
Izračunajte $f(0)$, $\lim_{x\to 0^+}f(x)$, $\lim_{x\to 0^-}f(x)$, $\lim_{x\to 0}f(x)$. Ali je funkcija f zvezna v točki $x=0$?

Rešitev. Očitno je $f(0) = 0$. Vidimo, da je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}(x-3) = -3\\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}(-2x-3) = -3.\end{aligned}$$

Iz tega sledi, da je $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$. Vendar funkcija f ni zvezna v točki $x = 0$, saj $\lim_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.

11. Funkcija f je podana s predpisom

$$f(x,y) = \begin{cases} -5x-1; & x < 0\\ x^3+2; & x \in [0,1]\\ 3x; & x > 1\end{cases}$$

Izračunajte

(a) $f(0)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$

(b) $f(1)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1} f(x)$

Ali je funkcija f zvezna v točkah $x = 0$ in $x = 1$?

Rešitev.

(a) $f(0) = 2$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x^3+2) = 2$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-5x-1) = -1$, $\lim_{x\to 0} f(x)$ ne obstaja.

(b) $f(1) = 3$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 3x = 3$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^3+2) = 3$, $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$.

Funkcija f ni zvezna v točki $x = 0$, v točki $x = 1$ pa je zvezna.

12. Določite a tako, da bo funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x^2+1; & x \leq 1\\ 4-x^2a; & x > 1\end{cases}$$

zvezna.

Rešitev. Funkcija f bo zvezna, ko bo $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$. Torej $\lim_{x\to 1^+}(4-x^2a) = \lim_{x\to 1^-}(2x^2+1)$. Iz tega sledi $4 - a = 3$, kar pomeni, da je $a = 1$.

13. Določite a tako, da bo funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3; & x \geq 1 \\ -3x^2 + a; & x < 1 \end{cases}$$

zvezna.

Rešitev. Ker mora biti $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$, je $1 = -3 + a$, iz česar sledi, da je $a = 4$.

14. Naj bo

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x-4|}{x-4}; & x \neq 4 \\ 0; & x = 4 \end{cases}$$

Ali obstaja $\lim_{x\to 4} f(x)$?

Rešitev. Vidimo, da je

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{|x-4|}{x-4} = \lim_{x\to 4^+} \frac{x-4}{x-4} = 1$$

in

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \frac{|x-4|}{x-4} = \lim_{x\to 4^+} \frac{-(x-4)}{x-4} = -1.$$

S tem smo pokazali, da leva in desna limita funkcije f v točki $x = 4$ nista enaki. Iz tega sledi, da ne obstaja $\lim_{x\to 4} f(x)$.

15. Naj bo

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$$

Ali je funkcija zvezna v točki $x = 0$?

Rešitev. Ker je $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, je

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Ker je $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, je

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty.$$

S tem smo pokazali, da leva in desna limita funkcije f v točki $x = 0$ nista enaki, iz česar sledi, da funkcija f ni zvezna v točki $x = 0$.

16. Določite $f(a)$ tako, da bodo dane funkcije zvezne v točki a.

    (a) $f(x) = \frac{\sin(3x)}{4x}$, $a = 0$
    (b) $f(x) = (1 + 5x)^{\frac{1}{2x}}$, $a = 0$
    (c) $f(x) = \frac{1-\sqrt{x-3}}{x^2-16}$, $a = 4$

Rešitev. Funkcija f bo zvezna v točki a, ko bo $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

(a) $f(0) = \frac{3}{4}$
(b) $f(0) = e^{\frac{5}{2}}$
(c) $f(4) = -\frac{1}{16}$

Viri

1. Cedilnik, A.: Matematični priročnik. Didakta, Radovljica, 1997
2. Fošner, Gorše, Povh, Pustavrh, Zalar: Matematične metode v uporabi. DMFA (v pripravi)
3. Jamnik, R.: Matematika. DMFA, Lj, 1994
4. Mencinger, M: Zbirka rešenih nalog iz matematične analize in algebre. UM, FG, Mb, 2006
5. Mizori-Oblak, P.: Matematika za študente tehnike in naravoslovja, 1.del. UL, FS, Lj, 2001
6. Usenik, J.: Matematične metode v prometu. UL, FPP, Portorož, 1998