ZBIRKA NALOG IZ VEKTORSKIH PROSTOROV

Ajda in Maja

FOŠNER

Izdajatelj in založnik:
Fakulteta za logistiko Univerze v Mariboru

Avtor:
Ajda Fošner in Maja Fošner

Lektoriranje:
Andreja Čurin

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

512.642(075.8)(076.1)

FOŠNER, Ajda
Zbirka nalog iz vektorskih prostorov [Elektronski vir] /
Ajda in Maja Fošner. - Celje : Fakulteta za logistiko, 2007

Način dostopa (URL): http://fl.uni-mb.si/eknjige/Zbirka_nalog_iz_vektorskih_prostorov.pdf.
- Opis temelji na verziji z dne 14.08.2007

ISBN 978-961-6562-09-6
1. Fošner, Maja
234540800

Kazalo

Poglavje 1

Vektorski prostori

1. Naj bo V prostor realnih zaporedij in U množica takih realnih zaporedij, ki imajo lihe člene enake nič. Pokažite, da je U podprostor prostora V in poiščite kak njegov komplement.

   Namig. Komplement prostora U je na primer

   $$W = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid x_{2n} = 0, n \in \mathbb{N}\}.$$

2. Poiščite kako množico linearno neodvisnih elementov prostora $\mathbb{R}^3$, ki zadoščajo rešitvi enačbe $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

   Rešitev. Iskana množica je na primer $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (2, 1, -1)\}$.

3. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo

   $$\overline{x}^n = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots).$$

   Ali je množica zaporedij $\{\overline{x}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ linearno neodvisna?

   Rešitev. Množica zaporedij $\{\overline{x}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je linearno neodvisna.

4. Naj bodo vektorji $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ linearna kombinacija linearno neodvisnih vektorjev $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pokažite, da so vektorji $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ linearno odvisni.

   Namig. Vektorje $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ zapišite kot linearno kombinacijo vektorjev $a_1, a_2, \ldots, a_n$. S pomočjo tega zapisa pokažite želeno.

5. Pokažite, da so funkcije e^x, e^{-x} in $\sin x$ linearno neodvisne v prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

   Namig. Z opazovanjem vrednosti funkcij v $x = 0$ in $x = \pi$ pokažemo želeno.

6. Ali so funkcije 2, $\cos 2x$ in $\cos^2 x$ linearno odvisne?

7. Določite $t \in \mathbb{R}$ tako, da bo množica

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - t(y + 2z - 2) = 4\}$$

   vektorski podprostor prostora $\mathbb{R}^3$. Poiščite kako maksimalno linearno neodvisno podmnožico tega prostora.

   Namig. Izkaže se, da je $t = 2$. Iskana množica je na primer $\{(4, 0, 1), (2, 1, 0)\}$.

8. Naj bo $V = \mathbb{R}_4[x]$ prostor realnih polinomov stopnje največ 4 in naj bosta

$$U = \{p \in V \mid p'' = 0\} \quad \text{in} \quad W = \mathcal{L}\{1 + x, x + x^2, x^2 + x^3, x^3 + x^4\},$$

   kjer je p'' drugi odvod polinoma p. Ali je $U \subseteq W$?

   Namig. Opazimo, da je $U = \mathcal{L}\{1, x\}$. Ker $1, x \notin W$, je odgovor na zastavljeno vprašanje negativen.

9. Naj bo $V = \mathbb{R}_3[x]$ prostor realnih polinomov stopnje največ 3. Določite $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tako, da bosta množici $U = \{p \in V \mid p(0) - (\alpha-1)p'(0) + \alpha = \beta\}$ in $W = \{p \in V \mid p(0) - p''(0) = \beta + 1, p(-1) = 0\}$ vektorska podprostora prostora V. Poiščite bazo preseka $U \cap W$ in bazo vsote $U + W$.

Namig. Izkaže se, da je $\alpha = \beta = -1$. Baza preseka je $\mathcal{B}_{U\cap W} = \{2 - x + x^2 + 4x^3\}$, baza vsote je $\mathcal{B}_{U+W} = \{1, x, x^2, x^3\}$.

10. Kakšna mora biti funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da bo množica funkcij $\{1, f, f^2, f^3, \ldots\}$ linearno odvisna?

Rešitev. Obstajajo taki $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, ne vsi nič, da je

$$\alpha_0 + \alpha_1 f(x) + \alpha_2 f(x)^2 + \ldots + \alpha_n f(x)^n = 0$$

za vse $x \in \mathbb{R}$. Zapisano drugače, vsaka funkcijska vrednost je ničla (neničelnega) polinoma

$$p(y) = \alpha_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \ldots + \alpha_n y^n.$$

Toda polinom ima le končno mnogo ničel. Torej je potreben pogoj za linearno odvisnost množice $\{1, f, f^2, f^3, \ldots\}$, da f zavzame le končno mnogo različnih vrednosti. Ta pogoj pa je tudi zadosten. Namreč, če f zavzame le vrednosti $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$, je

$$(f(x) - c_1) \cdot \ldots \cdot (f(x) - c_m) = 0$$

za vsak $x \in \mathbb{R}$, torej

$$f(x)^m + \alpha_{m-1} f(x)^{m-1} + \ldots + \alpha_1 f(x) + \alpha_0 = 0,$$

kjer je $\alpha_0 = (-1)^m c_1 \cdot \ldots \cdot c_m \in \mathbb{R}$, …, $\alpha_{m-1} = -(c_1 + \ldots + c_m) \in \mathbb{R}$. Posledica seveda je, da zvezna nekonstantna funkcija f nima te lastnosti.

11. Naj bo $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{R})$ prostor vseh realnih matrik in naj bosta

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathcal{A} \mid A^T = A\} \text{ ter } \mathcal{K} = \{A \in \mathcal{A} \mid A^T = -A\},$$

pri čemer A^T označuje transponirano matriko matrike A.

(a) Pokažite, da je $\mathcal{A} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{K}$.

(b) Zapišite bazi prostorov $\mathcal{S}$ in $\mathcal{K}$.

Rešitev.

(a) Vsak $A \in \mathcal{A}$ lahko zapišemo v obliki

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2},$$

kjer je

$$\frac{A + A^T}{2} \in \mathcal{S} \quad \text{in} \quad \frac{A - A^T}{2} \in \mathcal{K}.$$

Če je $A \in \mathcal{S} \cap \mathcal{K}$, je $A^T = A = -A$, iz česar sledi $A = 0$. Torej je $\mathcal{S} \oplus \mathcal{K} = \{0\}$.

(b) Baza in dimenzija prostora $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{S}} = \{E_{ii} \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{E_{ij} + E_{ji} \mid i \neq j, 1 \leq i, j \leq n, \},$$

$$\dim \mathcal{S} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Baza in dimenzija prostora $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{K}} = \{E_{ij} - E_{ji} \mid i \neq j, 1 \leq i, j \leq n, \},$$

$$\dim \mathcal{K} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

12. Naj bo $T_n(\mathbb{R})$ prostor zgoraj trikotnih $n \times n$ matrik, $S_n(\mathbb{R})$ pa prostor strogo spodaj trikotnih $n \times n$ matrik. Poiščite kako bazo prostorov $T_n(\mathbb{R})$ in $S_n(\mathbb{R})$ ter zapišite njuni dimenziji.

Rešitev. Baza in dimenzija prostora $T_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{B}_{T_n(\mathbb{R})} = \{E_{ii} \mid 1 \leq i \leq n\} \ \cup \ \{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, i < j \leq n\},$$

$$\dim T_n(\mathbb{R}) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Baza in dimenzija prostora $S_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{B}_{S_n(\mathbb{R})} = \{E_{ij} \mid 1 < i \leq n, 1 \leq j < i\},$$

$$\dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

13. Definirajmo preslikave $A, B, C : \mathbb{R}^{[0,1]} \to \mathbb{R}^{[0,1]}$ s predpisi

    (a) $(Af)(x) = \sqrt[3]{f(x)}$,

    (b) $(Bf)(x) = f(1-x)$,

    (c) $(Cf)(x) = xf(x)$.

    Ali so preslikave linearne? Določite jedro in zalogo vrednosti linearnih preslikav.

    Rešitev. Preslikavi B in C sta linearni. Preslikava B je bijektivna. Ni težko preveriti, da je $KerC = \{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} \mid f(x) = 0, x \in (0,1]\}$ in $ImC = \{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} \mid f(0) = 0\}$.

14. Naj bo A linearen operator na vektorskem prostoru V. Pokažite: A je injektiven natanko tedaj, ko slika linearno neodvisne množice v linearno neodvisne množice.

    Rešitev. ($\Longrightarrow$) Naj bo $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ linearno neodvisna podmnožica prostora V. Potem je $0 = \alpha_1 As_1 + \alpha_2 As_2 + \ldots + \alpha_n As_n = A(\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \ldots + \alpha_n s_n)$. Ker je po predpostavki A injektiven operator, sledi $\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \ldots + \alpha_n s_n = 0$, kar nas privede do želenega rezultata $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.

    ($\Longleftarrow$) Predpostavimo, da A ni injektiven operator. Potem obstaja tak $0 \neq x \in V$, da je $Ax = 0$. Ker je $\{x\}$ linearno neodvisna množica, je tudi množica $\{Ax\} = \{0\}$ linearno neodvisna, kar pa ni res.

15. Naj bosta U in V končno razsežna vektorska prostora nad poljem F in naj bo $A : U \to V$ linearen operator. Pokažite: A je surjektiven natanko tedaj, ko slika ogrodje v ogrodje.

Rešitev. ($\Longrightarrow$) Naj bo $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ ogrodje prostora U in naj bo $v \in V$. Potem obstaja tak $u \in U$, da je $v = Au = A(\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \ldots + \alpha_n s_n) = \alpha_1(As_1) + \alpha_2(As_2) + \ldots + \alpha_n(As_n)$ za neke $\alpha_i \in F$.

($\Longleftarrow$) Če je množica S ogrodje prostora U, je $A(S) = \{As \mid s \in S\}$ ogrodje prostora V. Naj bo $v \in V = \mathcal{L}(A(S))$. Potem je $v = \alpha_1 As_1 + \alpha_2 As_2 + \ldots + \alpha_n As_n = A(\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \ldots + \alpha_n s_n) = Au$, $s_i \in S$, $\alpha_j \in F$, $1 \leq i, j \leq n$.

16. Naj bodo $x, y, z \in \mathbb{R}$. Ali je ravnina $z = x + y$ hiperravnina? Poiščite take linearne funkcionale f, da je $Kerf$ ta ravnina.

Rešitev. Ravnina $z = x + y$ je hiperravnina. Naj bo $a \in \mathbb{R}$ in f_a preslikava definirana s predpisom $f_a(x, y, z) = a(x + y - z)$. Jedro takih preslikav je ravnina $z = x + y$.

17. Naj bo V prostor polinomov z realnimi koeficienti stopnje manjše ali enake n in naj bo $H = \{a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\}$. Ali je H hiperravnina? Poiščite kak linearni funkcional f z lastnostjo $Kerf = H$.

Rešitev. Množica H je hiperravnina. Če definiramo preslikavo $f : V \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(p) = p(0)$, $p \in V$, potem je $Kerf = H$.

18. Naj bo V končno razsežen vektorski prostor nad poljem F in naj bosta f ter g neničelna linearna funkcionala na V. Pokažite: če je $Kerf \subseteq Kerg$, je $g = \lambda f$ za nek $\lambda \in F$.

Rešitev. Ker je jedro neničelnega linearnega funkcionala hiperravnina, obstaja tak $0 \neq a \in V$, da je $f(a) \neq 0$. Naj bo $x \in V$. Potem je $x - \frac{f(x)}{f(a)} a \in Kerf$ in zato je $g(x) = f(x)\frac{g(a)}{f(a)}$ za vsak $x \in V$.

19. Naj bosta $A, B : V \to V$ taka endomorfizma končno razsežnega vektorskega prostora V, da velja $V = ImA \oplus KerB$. Pokažite, da sta zalogi vrednosti preslikav BA in B enaki.

Rešitev. Naj bo $x \in ImB$. Potem obstaja tak $y \in V$, da je $x = By$. Po predpostavki je $y = z + z'$, kjer sta $z \in ImA$ in $z' \in KerB$. Torej je $x = Bz$. Ker je $z \in ImA$, je $z = Au$ za nek $u \in V$. Iz tega sledi želeno, $x = BAu$.

20. Naj bodo U, V in W vektorski prostori nad istim poljem in naj bosta $A : U \to V$ ter $B : V \to W$ linearni preslikavi. Pokažite: $BA = 0$ natanko tedaj, ko je $ImA \subseteq KerB$.

Rešitev. ($\Longleftarrow$) Predpostavimo, da je $ImA \subseteq KerB$ in naj bo $u \in U$. Potem je $Au \in ImA$. Sledi $BAu = 0$ za vsak $u \in U$.

($\Longrightarrow$) Naj bo $BA = 0$ in naj bo $v \in ImA$. Potem je $v = Au$ za nek $u \in U$. Hitro vidimo, da je $v \in KerB$.

21. Naj bosta $D, J : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ preslikavi definirani s predpisoma $Dp = p'$ in $(Jp)(x) = \int_0^x p(t)\mathrm{d}t$.

    (a) Določite preslikavi DJ in JD.

    (b) Določite matriki linearnih operatorjev D in J glede na standardno bazo prostora realnih polinomov $\mathbb{R}[x]$.

Rešitev.

(a) Preslikava DJ je identiteta, preslikava JD pa projektor, saj je $(JD)^2 = JD$.

(b) Matriki linearnih operatorjev D in J glede na standardno bazo prostora realnih polinomov $\mathbb{R}[x]$ sta:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \end{bmatrix}.$$

22. Naj bo V vektorski prostor. Pokažite: če za linearno preslikavo $P : V \to V$ velja $P^2 = P$, je $V = KerP \oplus ImP$.

Rešitev. Naj bo $x \in KerP \cap ImP$. Potem je $Px = 0$ in $x = Py$ za nek $y \in V$. Torej je $0 = Px = P^2y = Py = x$. Prav tako vidimo, da lahko vsak $x \in V$ zapišemo kot $x = (x - Px) + Px$, kjer je $x - Px \in KerP$ in $Px \in ImP$.

23. Naj bo V vektorski prostor in $A : V \to V$ linearni operator. Pokažite:

(a) $KerA \subseteq KerA^2 \subseteq KerA^3 \subseteq \ldots$

(b) Naj za nek $k \in \mathbb{N}$ velja $KerA^k = KerA^{k+1}$. Potem je tudi $KerA^{k+2} = KerA^k$ (in zato $KerA^k = KerA^{k+j}$ za vsak $j \in \mathbb{N}$).

(c) Če je $\dim V = n < \infty$, potem je $KerA^n = KerA^{n+1} = KerA^{n+2} = \ldots$ S primerom pokažite, da je lahko $KerA^{n-1} \neq KerA^n$.

(d) Naj bo V neskončno razsežen prostor. S primerom pokažite, da lahko velja $KerA^n \neq KerA^{n+1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Namig.

(a) Naj bo $x \in KerA^n$. Potem je $A^{n+1}x = A(A^n x) = 0$, kar pomeni, da je $x \in KerA^{n+1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

(b) Glede na (a) je $KerA^k \subseteq KerA^{k+2}$. Predpostavimo, da je $x \in KerA^{k+2}$. Potem je $Ax \in KerA^{k+1}$ in zato je $Ax \in KerA^k$. Hitro vidimo, da je $x \in KerA^k$.

(c) Upoštevajte $\dim A^i$. Poiščite tako realno $n \times n$ matriko A, da je $A^{n-1} \neq 0$ in $A^n = 0$. S pomočjo te matrike nato konstruirajte iskani operator na npr. $\mathbb{R}^n$.

(d) Naj bo V vektorski prostor realnih zaporedij in $A : V \to V$ preslikava definirana s predpisom $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$.

24. Naj bo V vektorski prostor in $A : V \to V$ linearen operator. Pokažite:

(a) $ImA \supseteq ImA^2 \supseteq ImA^3 \supseteq \ldots$

(b) Naj za nek $k \in \mathbb{N}$ velja $ImA^k = ImA^{k+1}$. Potem je tudi $ImA^{k+2} = ImA^k$ (in zato $ImA^k = ImA^{k+j}$ za vsak $j \in \mathbb{N}$).

(c) Če je $\dim V = n < \infty$, potem je $ImA^n = ImA^{n+1} = ImA^{n+2} = \ldots$ S primerom pokažite, da je lahko $ImA^{n-1} \neq ImA^n$.

Namig. Glejte namig pri nalogi 23.

25. Naj bo $M = M_n(\mathbb{R})$ algebra realnih $n \times n$ matrik, $n \geq 2$. Za poljubni matriki $A, B \in M$ definirajmo preslikavo $L_{(A,B)} : M \to M$ s predpisom $L_{(A,B)}(X) = AXB^T$.

(a) Pokažite, da je $L_{(A,B)}$ linearen operator. Kaj je $L_{(A,B)}L_{(B,A)}$?

(b) Poiščite bazo $ImL_{(E_{11},E_{12})}$. Ali je $KerL_{(E_{11},E_{12})}$ hiperravnina?

(c) Naj bo $n = 2$ in naj bo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

i. Pokažite, da je $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{11} - E_{21}, E_{12} + E_{21}, E_{22}\}$ baza prostora M.

ii. Operatorju $L_{(A,A)}$ priredite matriko glede na bazo $\mathcal{B}$.

Namig.

(a) Vidimo, da je $L_{(A,B)}L_{(B,A)} = L_{(AB,BA)}$.

(b) Baza prostora $ImL_{(E_{11},E_{12})}$ je $\mathcal{B} = \{E_{11}\}$, $\dim KerL_{(E_{11},E_{12})} = n^2 - 1$.

(c) i. Obravnava enakosti $\alpha E_{11} + \beta(E_{11} - E_{21}) + \gamma(E_{12} + E_{21}) + \delta E_{22} = 0$ nas privede do želenega.

ii. Matrika prirejena operatorju $L_{(A,A)}$ glede na bazo $\mathcal{B}$ je $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

26. Naj bodo P_1, P_2 in P_3 taki projektorji na vektorskem prostoru X, da je $P_iP_j = -P_jP_i$ za vse $i \neq j$ ter $P_1 + P_2 + P_3 = I$. Pokažite, da je

$$X = ImP_1 \oplus ImP_2 \oplus ImP_3.$$

Namig. Najprej pokažite, da je $P_{ij} = 0$, $i \neq j$. Če je $x \in X$, je

$$x = Ix = (P_1 + P_2 + P_3)x = P_1x + P_2x + P_3x$$

in zato je $x \in ImP_1 + ImP_2 + ImP_3$.

Naj bo $x \in ImP_1 \cap (ImP_2 \oplus ImP_3)$. Potem je $x = P_1x$ in $x = P_2x_2 + P_3x_3$ za neka $x_2, x_3 \in X$. Iz tega sledi $P_1^2x = P_1P_2x_2 + P_2P_3x_3$. Torej je $P_1x = 0$ in zato je $x = 0$. Podobno pokažemo še preostale lastnosti.

Poglavje 2

Banachovi prostori

1. Naj bo Y neprazna podmnožica Banachovega prostora X, Z pa neprazna podmnožica duala X^*. Naj bo

$$Y^{\perp} = \{f \in X^* \mid f(y) = 0, \forall y \in Y\}$$

in

$$Z^{\top} = \{x \in X \mid f(x) = 0, \forall f \in Z\}.$$

Pokažite:

(a) $Y^{\perp}$ je zaprt podprostor prostora X^*.

(b) $Y \subseteq (Y^{\perp})^{\top}$.

(c) Za vsak zaprt podprostor $Y \subseteq X$ je $(Y^{\perp})^{\top} = Y$.

Rešitev.

(a) Naj bo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tako zaporedje v $Y^{\perp}$, da je $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Potem je $f(y) = \lim_{n\to\infty} f_n(y) = 0$ za vsak $y \in Y$. Iz tega sledi, da je $f \in Y^{\perp}$.

(b) Naj bo $y \in Y$. Potem za vsak $f \in Y^{\perp}$ velja $f(y) = 0$. Torej je $y \in (Y^{\perp})^{T} = \{x \in X \mid f(x) = 0, \forall f \in Y^{\perp}\}$.

(c) Glede na (b) moramo pokazati, da je $(Y^{\perp})^{\top} \subseteq Y$. Po posledici Hahn Banachovega izreka obstaja tak $f \in X^*$, da je $f(Y) = 0$ in $f(x) \neq 0$ za nek $x \in X - Y$. Sledi $x \notin (Y^{\perp})^{\top}$. S tem smo pokazali želeno.

2. Naj bosta $(V_1, \|.\|_1)$ in $(V_2, \|.\|_2)$ normirana prostora.

   (a) Pokažite, da je $V_1 \times V_2$ normiran prostor z normo
   $$\|(v_1, v_2)\| = \|v_1\|_1 + \|v_2\|_2.$$

   (b) Pokažite, da je $V_1 \times V_2$ normiran prostor z normo
   $$\|(v_1, v_2)\| = \max\{\|v_1\|_1, \|v_2\|_2\}.$$

Namig. Preverite vse lastnosti za normirane prostore.

3. Naj bo $(Y, \|.\|)$ normiran prostor, X vektorski prostor in $A : X \to Y$ linearen operator. Za vsak $x \in X$ definiramo $\|x\|_1 = \|Ax\|$. Katerim pogojem mora zadoščati operator A, da bo $\|.\|_1$ norma na X?

Rešitev. Linearni operator A je injektiven natanko tedaj, ko je $\|.\|_1$ norma.

4. Naj bosta P in Q projektorja na vektorskem prostoru X.

   (a) Dokažite, da so naslednji trije pogoji ekvivalentni:
      i. $PQ = QP = 0$,
      ii. $P + Q$ je projektor,
      iii. $PQ + QP = 0$.

   (b) Naj bo $(X, \|.\|)$ normiran prostor in naj projektorja P ter Q zadoščata pogojem iz (a). Pokažite, da je s predpisom $\|x\|_1 = \|Px\| + \|Qx\|$ definirana norma na X natanko tedaj, ko je $P + Q = I$.

Namig.

(a) (iii $\Rightarrow$ i) Identiteto $PQ + QP = 0$ pomnožite z obeh strani s P in nato še s Q.

(b) ($\Longrightarrow$) Predpostavimo, da je $\|.\|_1$ norma na X in naj bo $R = P+Q \neq I$. Ker je $0 \neq I - R$ projektor, je $KerR = Im(I-R) \neq 0$. Iz tega sledi, da obstaja tak $0 \neq x \in X$, da je $Rx = 0$. Torej je $0 = PRx = (P^2 + PQ)x = Px$. Podobno pokažemo, da je $Qx = 0$. S tem pridemo v protislovje, saj je $\|x\|_1 = 0$ in zato $x = 0$.

($\Longleftarrow$) Če je $P+Q = I$, ni težko preveriti, da je s predpisom $\|x\|_1 = \|Px\| + \|Qx\|$ definirana norma na X.

5. Naj bosta $(X, \|.\|_1)$ in $(Y, \|.\|_2)$ normirana prostora. Pokažite, da je $X \times Y$ Banachov prostor z normo $\|(x,y)\| = \|x\|_1 + \|y\|_2$ natanko tedaj, ko sta X in Y Banachova prostora.

6. Naj bo X vektorski prostor vseh polinomov z realnimi koeficienti. Pokažite, da je s predpisom

$$\|a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n\| = |a_0| + |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$$

definirana norma na X.

(a) Ali je $(X, \|.\|)$ Banachov prostor?

(b) Ali je podprostor polinomov stopnje 2 zaprt v X?

Namig.

(a) Opazujmo zaporedje $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kjer je $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} x^k$. Ni težko preveriti, da je to zaporedje Cauchyjevo. Predpostavimo, da je $\lim_{n\to\infty} p_n = p \in X$, $p(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x$. Potem za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq n_0$ velja

$$\|p_n - p\| = |1 - b_0| + |\frac{1}{2} - b_1| + \ldots + |\frac{1}{2^m} - b_m| + \frac{1}{2^{m+1}} + \ldots + \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

Za $\epsilon = \frac{1}{2^{m+1}}$ to ne drži. Iz tega sledi, da X ni Banachov prostor.

(b) Podprostor polinomov stopnje 2 je zaprt v X.

7. Naj bo X vektorski prostor vseh realnih zaporedij, ki imajo kvečjemu končno mnogo neničelnih členov. Pokažite, da je s predpisom

$$\|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\| = \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

definirana norma na X. Ali je $(X, \|.\|)$ Banachov prostor?

Namig. Prostor X ni Banachov: opazujte zaporedje $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kjer je

$$x_n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, 0, 0, \ldots).$$

8. Naj bo X vektorski prostor vseh polinomov z realnimi koeficienti in naj bo $(a_0, a_1, \ldots)$ zaporedje pozitivnih realnih števil. Pokažite, da je s predpisom

$$\|p\| = \max |a_n p^{(n)}(0)|$$

definirana norma na X, kjer je $p^{(n)}$ n-ti odvod polinoma p.

(a) Ali je $(X, \|.\|)$ Banachov prostor?

(b) Ali je $\{p \in X \mid p'(0) = p''(0) = 0\}$ zaprt podprostor prostora X?

Namig.

(a) Prostor X ni Banachov: opazujte zaporedje $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kjer je

$$p_n(x) = \sum\nolimits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{2^k k! a_k}.$$

(b) Prostor je zaprt.

9. Pokažite, da sta c_0 in c zaprta podprostora l^∞.

Rešitev. Naj bo $\{\overline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje prostora c_0 in naj bo $\lim_{n\to\infty} \overline{x}_n = \overline{x}$. Potem za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq n_0$ velja $\|\overline{x}_n - \overline{x}\|_\infty = \sup|x_{n_k} - x_k| < \epsilon$. Ker je

$$|x_k| = |x_k - x_{n_k} + x_{n_k}| \leq \|\overline{x} - \overline{x}_n\|_\infty + |x_{n_k}|,$$

sledi $\lim_{n\to\infty} \overline{x} = \overline{0}$. Torej je $\overline{x} \in c_0$.

Naj bo $\{\overline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje prostora c in $\lim_{n\to\infty} \overline{x}_n = \overline{x}$. S pomočjo relacije

$$|x_k - x_l| = |x_k - x_{n_k} + x_{n_k} - x_{n_l} + x_{n_l} - x_l| \leq 2\|\overline{x} - \overline{x}_n\|_\infty + |x_{n_k} - x_{n_l}|$$

pokažemo, da je $\overline{x}$ Cauchyjevo zaporedje in zato konvergentno. Iz tega sledi, da je $\overline{x} \in c$.

10. Naj bo $X = \mathcal{C}[-1,1]$ prostor zveznih funkcij na zaprtem intervalu $[-1,1]$ opremljen z normo $\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)|\mathrm{d}x$. Pokažite, da $(X, \|.\|_1)$ ni poln prostor.

Namig. Naj bo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje funkcij, kjer je $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ funkcija definirana s predpisom

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 \ ; & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ nx \ ; & -\frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n} \\ 1 \ ; & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases} .$$

Vidimo, da je

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\mathrm{d}x = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|.$$

Iz tega sledi, da je $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo zaporedje.

Predpostavimo, da je zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno, $\lim_{n\to\infty} f_n = f \in X$. Naj bo $\epsilon > \frac{1}{n}$. Potem je

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x &\geq \int_{\epsilon}^{1} |1 - f(x)|\mathrm{d}x, \\ \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x &\geq \int_{-1}^{-\epsilon} |-1 - f(x)|\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Iz tega sledi, da je

$$f(x) = \begin{cases} -1 \ ; & -1 \leq x \leq -\epsilon \\ 1 \ ; & \epsilon \leq x \leq 1 \end{cases} .$$

Ker f ni zvezna funkcija, sledi želeno.

11. Naj bosta $\|.\|_1$ in $\|.\|_2$ ekvivalentni normi na prostoru X. Pokažite, da je $(X, \|.\|_1)$ Banachov prostor natanko tedaj, ko je $(X, \|.\|_2)$ Banachov prostor.

12. Na prostoru zveznih realnih funkcij $\mathcal{C}[0,1]$ vpeljimo normi $\|f\|_\infty = \max_{0 \le x \le 1} |f(x)|$ in $\|f\|_1 = \max_{0 \le x \le 1} |f(x)| + \int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x$.

    (a) Ali sta normi ekvivalentni?

    (b) Ali je $(\mathcal{C}[0,1], \|.\|_1)$ Banachov prostor?

Namig.

(a) Normi sta ekvivalentni.

(b) Ker je $(\mathcal{C}[0,1], \|.\|_\infty)$ Banachov prostor, po nalogi 11 velja, da je tudi $(\mathcal{C}[0,1], \|.\|_1)$ Banachov prostor.

13. Na prostoru $X = \mathcal{C}[0,1]$ vpeljimo norme $\|f\|_\infty = \max_{0 \le x \le 1} |f(x)|$, $\|f\|_1 = (\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}$ in $\|f\|_2 = \|f\|_1 + \|f\|_\infty$.

    (a) Ali sta normi $\|.\|_\infty$ in $\|.\|_1$ ekvivalentni?

    (b) Za katero normo je X Banachov prostor?

Namig.

(a) Normi nista ekvivalentni, saj $(X, \|.\|_1)$ ni Banachov prostor (upoštevajte nalogo 11).

(b) Prostora $(X, \|.\|_\infty)$ in $(X, \|.\|_2)$ sta Banachova prostora.

14. Naj bo $(X, \|.\|)$ normiran prostor. V vektorski prostor $W = X \times X$ vpeljimo normo $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$.

    (a) Pokažite, da je s predpisom $\|(x,y)\|_1 = \|(x-y, y)\|$ definirana norma na W.

    (b) Naj bo $(W, \|.\|)$ Banachov prostor. Ali je $(W, \|.\|_1)$ Banachov prostor?

Namig. (b) Prostor $(W, \|.\|_1)$ je Banachov: pokažite, da je

$$\frac{1}{2}\|(x,y)\| \leq \|(x,y)\|_1 \leq 2\|(x,y)\|$$

in upoštevajte nalogo 11.

15. Naj bo $(X, \|.\|)$ normiran prostor in naj bo $A : X \to X$ linearen operator. Pokažite:

    (a) S predpisom $\|x\|_1 = \|x - Ax\| + \|Ax\|$ je definirana norma na X.

    (b) Če je $(X, \|.\|)$ Banachov prostor, je vsako Cauchyjevo zaporedje v $(X, \|.\|_1)$ konvergentno v $(X, \|.\|)$.

    (c) Če je A omejen operator, je $(X, \|.\|)$ Banachov prostor natanko tedaj, ko je $(X, \|.\|_1)$ Banachov prostor.

Namig.

(b) Pokažite, da je $\|x\| \leq \|x\|_1$, iz česar sledi želeno.

(c) Pokažite, da sta normi $\|.\|$ in $\|.\|_1$ ekvivalentni in upoštevajte nalogo 11.

16. Naj bosta P in Q taka projektorja na normiranem prostoru $(X, \|.\|)$, da je tudi $P + Q$ projektor.

    (a) Dokažite, da je s predpisom $\|x\|_1 = \max\{\|Px\|, \|Qx\|\}$ definirana norma na X natanko tedaj, ko je $P = I - Q$.

    (b) Naj bo $P \in \mathcal{B}(X)$ in naj bo $(X, \|.\|)$ Banachov prostor. Ali je tedaj normiran prostor $(X, \|.\|_1)$ Banachov?

Namig. (b) Ker sta normi $\|.\|$ in $\|.\|_1$ ekvivalentni, sledi, da je $(X, \|.\|_1)$ Banachov prostor.

17. Naj bo $(X, \|.\|)$ Banachov prostor in naj bo G podmnožica $\mathcal{B}(X)$. Denimo, da je G taka grupa (za operacijo množenja operatorjev), da za vsak $T \in G$ velja $\|T\| \leq 1$. Pokažite, da je s predpisom $\|x\|_0 = \sup_{T\in G}\|Tx\|$ definirana norma na X, ki je ekvivalentna normi $\|.\|$ in v kateri so vsi operatorji $T \in G$ izometrije.

Rešitev. Ker je $\|T\| \leq 1$ za vsak $T \in G$, je $\|x\|_0 \leq \|x\|$ za vsak $x \in X$. Po drugi strani pa je $\|x\| = \|Ix\| \leq \|x\|_0$. Torej sta normi $\|.\|$ in $\|.\|_0$ ekvivalentni.

Vzemimo poljuben $S \in G$. Potem je

$$\|Sx\|_0 = \sup_{T\in G}\|TSx\| = \sup_{T\in G}\|Tx\| = \|x\|_0$$

za vsak $x \in X$, kar pomeni, da je S izometrija v normi $\|.\|_0$.

18. Naj bo a pozitivno realno število. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ definirajmo operator $A_n : l^\infty \to l^\infty$ s predpisom

$$\begin{aligned} & A_n(x_1, x_2, \ldots) \\ = \; & \frac{1}{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n, -x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots). \end{aligned}$$

(a) Kakšen mora biti a, da bo zaporedje $(A_n, A_n^2, A_n^3, \ldots)$ konvergentno oziroma bo imelo kako konvergentno podzaporedje?

(b) Ali je zaporedje $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno v operatorski normi?

(c) Naj bo $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3 \ldots)$ zaporedje z limito 0. Ali je zaporedje $\{A_n\overline{x}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno?

Namig.

(a) Pokažite, da je

$$(A_n, A_n^2, A_n^3, A_n^4, \ldots) = (A_n, \frac{1}{a^2}I, \frac{1}{a^2}A_n, \frac{1}{a^4}I, \frac{1}{a^4}A_n, \ldots).$$

To zaporedje bo konvergentno, ko bo $a > 1$, in bo imelo konvergentno podzaporedje, če bo $a = 1$.

(b) Ker za $n \neq m$ velja $\|A_n - A_m\|_\infty = 2$, zaporedje $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ni konvergentno.

(c) Zaporedje je konvergentno.

19. Naj bo prostor $X = \mathcal{C}[-1,1]$ opremljen z normo $\|f\|_\infty = \max_{-1\leq x\leq 1}|f(x)|$ in naj bo $F : (X, \|.\|_\infty) \to \mathbb{C}$ preslikava definirana s predpisom

$$F(f) = \int_0^1 (f(t) - f(-t))\mathrm{d}t.$$

Pokažite, da je F omejen linearen funkcional in izračunajte njegovo normo.

Namig. Opazujte zaporedje funkcij, ki je definirano v nalogi 10 in upoštevajte, da je

$$|F(f_n)| = |\int_0^1 (f_n(x) - f_n(-x)\mathrm{d}x| = 2|\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x| = 2 - \frac{1}{n}$$

Norma operatorja F je 2.

20. Naj bo prostor $X = \mathcal{C}[0,1]$ opremljen z normo $\|f\|_\infty = \max_{0\leq x\leq 1}|f(x)|$. Pokažite, da je s predpisom $\varphi(f) = f(1) - f(0)$ definiran omejen linearen funkcional na X in izračunajte njegovo normo.

Rešitev. Norma operatorja φ je 2.

21. Naj bo $A : c \to c_0$ preslikava definirana s predpisom

$$A(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \{\frac{x_n}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Pokažite, da je A omejen linearen funkcional in izračunajte njegovo normo.

Rešitev. Norma operatorja A je 1.

22. Naj bo X normiran prostor, $\dim X \geq 2$, $a \in X$, $f \in X^*$ in naj bo $A : X \to X$ operator definiran s predpisom $Ax = f(x)a$. Pokažite, da je A omejen linearen operator in izračunajte njegovo normo. Ali je operator A injektiven? Ali je operator A surjektiven?

Rešitev. Norma operatorja A je $\|f\|\|a\|$. Operator A ni niti injektiven niti surjektiven.

23. Naj bo prostor $X = \mathcal{C}[0, b]$ opremljen z normo $\|f\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq b} |f(x)|$ in naj bo $A : X \to X$ operator definiran s predpisom $(Af)(x) = f(x) \cos x$.

    (a) Pokažite, da je $A \in \mathcal{B}(X)$ in izračunajte njegovo normo.

    (b) Kakšno mora biti število b, da bo operator A obrnljiv? Kateri operator je tedaj njegov inverz?

    (c) Izračunajte spekter operatorja A.

Rešitev.

(a) $\|Af\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, $\|A\| = 1$.

(b) $b < \frac{\pi}{2}$, $(A^{-1}f)(x) = f(x)(\cos x)^{-1}$.

(c) $\sigma(A) = \{\cos x \mid x \in [0, b]\}$.

24. Naj bo prostor $X = \mathcal{C}[\frac{1}{2}, b]$ opremljen z normo $\|f\|_\infty = \max_{\frac{1}{2} \leq x \leq b} |f(x)|$ in naj bo $A : X \to X$ operator definiran s predpisom $(Af)(x) = f(x) \ln x$.

    (a) Pokažite, da je $A \in \mathcal{B}(X)$ in izračunajte njegovo normo.

    (b) Kakšno mora biti število b, da bo operator A obrnljiv? Kateri operator je tedaj njegov inverz?

    (c) Izračunajte spekter operatorja A.

Rešitev.

(a) $\|A\| = \max_{\frac{1}{2} \leq x \leq b} |\ln x|$.

(b) $b < 1$, $(A^{-1}f)(x) = f(x)(\ln x)^{-1}$.

(c) $\sigma(A) = \{\ln x \mid x \in [\frac{1}{2}, b]\}$.

25. Na prostoru $X = \mathcal{C}[0,1]$ vpeljimo normo

$$\|f\| = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| + \int_0^1 |f(x)| \mathrm{d}x.$$

Naj bo $A : X \to X$ operator definiran s predpisom $(Af)(x) = xf(x)$.

(a) Pokažite, da je $(X, \|.\|)$ Banachov prostor.

(b) Pokažite, da je $A \in \mathcal{B}(X)$.

(c) Pokažite, da je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ konvergentna vrsta.

(d) Ali ima operator kako lastno vrednost?

Namig.

(a) Upoštevajte ekvivalentnost norm:

$$\|f\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \leq \|f\| \leq 2\|f\|_\infty.$$

(b) $\|A\| \leq 2$.

(c) Pokažite, da je $\|A^n\| \leq 2$ in upoštevajte $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!}$.

(d) Operator nima lastnih vrednosti.

26. Na prostoru $X = C[0,1]$ vpeljimo normo

$$\|f\| = 2 \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| + (\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}.$$

Naj bo $A : X \to X$ operator definiran s predpisom $(Af)(x) = e^{-x} f(x)$.

(a) Pokažite, da je $(X, \|.\|)$ Banachov prostor.

(b) Pokažite, da je $A \in \mathcal{B}(X)$.

(c) Ali vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$ konvergira?

(d) Zapišite A^{-1}. Ali ima operator A kako lastno vrednost?

Rešitev.

(a) Upoštevajte ekvivalentnost norm:

$$\|f\|_\infty = \max_{0\le x\le 1} |f(x)| \le \|f\| \le 3\|f\|_\infty.$$

(b) $\|A\| \le 3$.

(c) Pokažite, da je $\|A^n\| \le 3$ in upoštevajte $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n\|}{n!} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n!}$.

(d) Operator nima lastnih vrednosti.

27. Naj bo prostor $X = \mathcal{C}[0,1]$ opremljen z normo $\|f\|_\infty = \max_{0\le x\le 1} |f(x)|$ in naj bo $V : X \to X$ operator definiran s predpisom $(Vf)(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Pokažite, da je $V \in \mathcal{B}(X)$ kvazinilpotenten operator.

Namig. Najprej pokažite, da je $|(V^n f)(x)| \le \frac{x^n}{n!}\|f\|$, iz česar sledi $\|V^n\| \le \frac{1}{n!}$. Torej je

$$r(V) = \lim_{n\to\infty} \|V^n\|^{\frac{1}{n}} \le \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n!})^{\frac{1}{n}} = 0.$$

28. Naj bo prostor $X = \mathcal{C}[0,1]$ opremljen z normo $\|f\|_\infty = \max_{0\le x\le 1} |f(x)|$ in naj bosta $M, V : X \to X$ preslikavi definirani s predpisoma $(Mf)(x) = xf(x)$ ter $(Vf)(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Pokažite, da so $M, V, MV - VM \in \mathcal{B}(X)$, izračunajte njihove norme ter pokažite, da je $MV - VM$ kvazinilpotenten operator.

Namig. Vidimo, da je

$$((MV - VM)f)(x) = x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = (V^2 f)(x).$$

Torej je $MV - VM = V^2$. Po prejšnji nalogi je $\sigma(V^2) = \sigma(V)^2 = 0$.

29. Naj bo prostor $X = \mathcal{C}[0,1]$ opremljen z normo $\|f\|_\infty = \max_{0\le x\le 1}|f(x)|$ in naj bo $\mathcal{P}$ podprostor vseh polinomov. Pokažite, da sta s predpisoma

$$\begin{aligned} f(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) &= a_0, \\ g(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) &= a_0 + a_1 + \ldots + a_n \end{aligned}$$

definirana omejena linearna funkcionala na $\mathcal{P}$ in izračunajte njuni normi. Poiščite razširitvi funkcionalov f in g na prostor X, ki imata isti normi kot f oziroma g.

Rešitev. Norma funcionalov f in g je 1. Razširitev funkcionala f je npr. $F(\varphi) = \varphi(0)$, $\varphi \in X$, funkcionala g pa $G(\varphi) = \varphi(1)$, $\varphi \in X$.

30. Naj bo prostor zvezno odvedljivih realnih funkcij $X = C^1[0,1]$ opremljen z normo $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)| + \sup_{x\in[0,1]}|f'(x)|$ in naj bo $\mathcal{P}$ podprostor vseh polinomov. Pokažite, da sta s predpisoma

$$\begin{aligned} \varphi(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) &= a_0 + 5^{-1}a_1 + 5^{-2}a_2 + \ldots + 5^{-n}a_n, \\ \psi(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n) &= 3a_0 + 6a_1 + 9a_2 + 12a_3 + \ldots + 3(n+1)a_n \end{aligned}$$

definirana omejena linearna funkcionala na $\mathcal{P}$ in izračunajte njuni normi. Poiščite razširitvi funkcionalov φ in ψ na cel prostor X, ki imata isti normi kot φ oziroma ψ.

Rešitev. Opazimo, da je $\varphi(p) = p(\frac{1}{5})$, $\psi(p) = 3(p(1) + p'(1))$ in izračunamo, da je $\|\varphi\| = 1$ ter $\|\psi\| = 3$. Razširitev funkcionala φ je na primer $\varphi_1(f) = f(\frac{1}{5})$, $f \in X$, razširitev funkcionala ψ pa $\psi_1(f) = 3(f(x) + f'(x))$, $f \in X$.

31. Naj bo $X = \mathcal{C}[0,1]$ prostor opremljen z normo $\|f\|_\infty = \max_{0\le x\le 1}|f(x)|$. Z $\mathcal{L}$ označimo množico vseh lihih funkcij prostora X in z $\mathcal{S}$ množico vseh sodih funkcij prostora X.

(a) Pokažite, da sta $\mathcal{L}$ in $\mathcal{S}$ podprostora X in da je $\mathcal{L} \oplus \mathcal{S} = X$.

(b) Pokažite, da je s predpisom

$$\varphi(f) = \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)\mathrm{d}x$$

definiran omejen linearen funkcional na $\mathcal{L}$ in izračunajte njegovo normo.

(c) Poiščite tako razširitev ϕ funkcionala φ na X, da je $\|\phi\| = \|\varphi\|$.

Namig. Norma funcionala φ je $\frac{1}{2}$. Razširitev funkcionala φ je na primer $\phi(f) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\mathrm{d}x$, $f \in X$.

32. Naj bo prostor $X = \mathcal{C}[0,1]$ opremljen z normo $\|f\|_\infty = \max_{0\leq x\leq 1} |f(x)|$ in naj bo $Y = \{f \in X \mid f(0) = 0\}$.

(a) Pokažite, da je Y zaprt podprostor prostora X.

(b) Pokažite, da je s predpisom $\varphi(f) = f(\frac{1}{2}) - f(0)$ definiran omejen linearen funkcional na X. Izračunajte njegovo normo in normo njegove zožitve na Y.

(c) Poiščite kak tak linearni funkcional na X, ki se na Y ujema s φ in ima isto normo kot zožitev φ na Y.

Namig. Norma funcionala φ je 1. Razširitev funkcionala φ je na primer $\phi(f) = f(\frac{1}{2})$, $f \in X$.

33. Naj bo $(X, \|.\|)$ normiran prostor, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ in $x_1, x_2, \ldots, x_n$ linearno neodvisni vektorji prostora X. Pokažite, da sta naslednji dve trditvi ekvivalentni:

(a) obstaja tak $f \in X^*$, da je $\|f\| \leq 1$ in $f(x_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, n$,

(b) za poljubne $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ je

$$|b_1a_1 + b_2a_2 + \ldots + b_na_n| \leq \|b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n\|.$$

Rešitev. ((a) $\Rightarrow$ (b)) Opazimo, da je

$$\begin{aligned} |b_1a_1 + b_2a_2 + \ldots + b_na_n| &= |f(b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n)| \\ &\leq \|f\|\|b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n\| \\ &\leq \|b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n\|. \end{aligned}$$

((b) $\Rightarrow$ (a)) Naj bo $Y = \mathcal{L}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Definirajmo $f_1 : Y \to \mathbb{C}$ s predpisom $f_1(x_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, n$. Glede na predpostavko ni težko preveriti dobre definiranosti preslikave f_1. Potem po Hahn Banachovem izreku obstaja tak $f \in X^*$, da je zožitev f na Y ravno preslikava f_1 ter $\|f\| = \|f_1\| \leq 1$.

34. Naj bo X normiran prostor. Pokažite, da je $\dim X < \infty$ natanko tedaj, ko je $\dim X^* < \infty$.

Namig. ($\Longrightarrow$) Če je $\dim X < \infty$, je $\dim X = \dim X^*$.

($\Longleftarrow$) Predpostavimo, da je $\dim X = \infty$. Potem obstaja neskončna linearno neodvisna množica $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset X$. Za vsako naravno število n definirajmo linearen funkcional $f_n \in X^*$ s predpisom $f_n(x_n) = 1$ in $f_n(x_i) = 0$, če je $i \neq n$. Linearni funkcionali f_n, $n \in \mathbb{N}$, so linearno neodvisni. Torej je $\dim X^* = \infty$.

35. Naj bo $(X, \|.\|)$ normiran prostor in $x \in X$ tak, da je $\|x\| = 1$. Pokažite, da obstaja taka zaprta hiperravnina H, da je $\mathrm{d}(x, H) = 1$.

Namig. Po posledici Hahn Banachovega izreka obstaja tak $f \in X^*$, da je $\|f\| = 1$ in $f(x) = \|x\| = 1$. Pokažimo, da za zaprto hiperravnino $Ker f = H$ velja $\mathrm{d}(x, H) = 1$. Ker je $1 = \|x\| = \|x - 0\|$, je $\mathrm{d}(x, H) \leq 1$. V nadaljevanju želimo pokazati, da je $1 \leq \mathrm{d}(x, H) = inf_{h \in H}\|x - h\|$. Predpostavimo nasprotno. Sledi, da je $\|f\| < 1$, kar je v nasprotju s predpostavko.

36. Naj bo X refleksiven prostor in $f \in X^*$. Pokažite, da obstaja tak $x \in X$, da je $\|x\| = 1$ in $f(x) = \|f\|$.

Namig. Po posledici Hahn Banachovega izreka obstaja tak $F \in X^{**}$, da je $F(f) = \|f\|$ in $\|F\| = 1$. Ker je X refleksiven prostor, obstaja tak $x \in X$, da je $\Phi(x) = F$, kjer je $\Phi : X \to X^{**}$ surjektivna kanonična preslikava. Torej je $\|f\| = F(f) = f(x)$ in $1 = \|F\| = \|x\|$.

37. Naj bo X refleksiven prostor in Y zaprt podprostor prostora X^*. Pokažite, da obstaja tak neničelni vektor $x \in X$, da je $f(x) = 0$ za vsak $f \in Y$.

Namig. Glede na posledico Hahn Banachovega izreka obstaja tak $F \in X^{**}$, da je $F(Y) = 0$. Ker je X refleksiven prostor, obstaja tak $x \in X$, da je $\Phi(x) = F$, kjer je $\Phi : X \to X^{**}$ surjektivna kanonična preslikava. Torej je $F(f) = f(x) = 0$ za vsak $f \in Y$.

38. Naj bo X normiran prostor, $x \in X$ in naj bo $E \subset X$. Pokažite, da sta naslednji dve trditvi ekvivalentni:

(a) $x \in \overline{\mathcal{L}(E)}$,

(b) če je $f \in X^*$ tak, da je $f(E) = 0$, sledi $f(x) = 0$.

Namig. ((a) $\Rightarrow$ (b)) Če je $x \in \overline{\mathcal{L}(E)}$, je $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $x_n \in \mathcal{L}(E)$. Ni težko preveriti, da potem sledi želeno.

((b) $\Rightarrow$ (a)) Predpostavimo, da $x \notin \overline{\mathcal{L}(E)}$. Potem po posledici Hahn Banachovega izreka obstaja tak $f \in X^*$, da je $f(\mathcal{L}(E)) = 0$ in $f(x) \neq 0$. Torej je tudi $f(E) = 0$. Glede na (b) sledi, da je $f(x) = 0$, kar je v protislovju s predpostavko.

39. Naj bo X refleksiven prostor in naj bo $f \in X^*$.

(a) Pokažite, da obstaja tak $y \in X$, da je $x - \frac{f(x)}{\|f\|} y \in Kerf$ za vsak $x \in X$.

(b) Naj bo preslikava $P : X \to X$ definirana s predpisom

$$Px = x - \frac{f(x)}{\|f\|} y, \ x \in X.$$

Pokažite, da je P projektor, $ImP = Kerf$ in $\|I - P\| = 1$.

Rešitev.

(a) Glede na nalogo 36 obstaja tak $y \in X$, da je $f(y) = \|f\|$ in $1 = \|y\|$. Potem je $f(x - \frac{f(x)}{\|f\|} y) = 0$ za vsak $x \in X$.

(b) Ker je $Py = y - \frac{f(y)}{\|f\|}y = 0$, ni težko preveriti, da je $P^2 = P$. Naj bo $x \in ImP$. Potem je $x = Px \in Kerf$. Pokažimo še obratno: če je $x \in Kerf$, je $f(x) = 0$ in zato je $x = Px \in ImP$.
Ker je
$$\|x - Px\| = \frac{|f(x)|}{\|f\|}\|y\| \leq \|x\|,$$
je $\|I - P\| \leq 1$. Upoštevajmo, da je $\|y - Py\| = 1$, iz česar sledi $\|I - P\| = 1$.

40. Naj bo X Banachov prostor. Za poljubna $y, z \in X$ in $f, g \in X^*$ definirajmo $P : X \to X$ s predpisom $Px = f(x)y + g(z)x$.

(a) Pokažite, da je $P \in \mathcal{B}(X)$.

(b) Denimo, da je X refleksiven prostor, Y^* pravi zaprt podprostor prostora X^* in da je $\|f\| = 1$. Pokažite, da obstajata taka neničelna $y, z \in X$, da je P projektor za katerikoli $g \in Y^*$.

Rešitev. (b) Vidimo, da je

$$\begin{aligned} P^2x &= P(f(x)y + g(z)x) = f(f(x)y + g(z)x)y + g(z)(f(x)y + g(z)x) \\ &= f(x)f(y)y + g(z)f(x)y + g(z)f(x)y + g(z)g(z)x. \end{aligned}$$

Glede na nalogo 36 obstaja tak $y \in X$, da je $\|y\| = 1$ in $f(y) = \|f\| = 1$. Če upoštevamo še nalogo 37, obstaja tak $z \in X$, da je $g(z) = 0$ za vsak $g \in Y^*$. Iz tega sledi želeno.

41. Naj bo X Banachov prostor in naj bosta $A, B \in \mathcal{B}(X)$ taka operatorja, da je $ATB = BTA$ za vsak $T \in \mathcal{B}(X)$. Pokažite, da je $B = \lambda A$ za nek $\lambda \in \mathbb{C}$.

Rešitev. Naj bo $0 \neq f \in X^*$ in naj bo $T : X \to X$ operator definiran s predpisom $T(x) = f(x)u$ za nek $0 \neq u \in X$. Potem je $T \in \mathcal{B}(X)$. Po eni strani je $ATBx = f(Bx)Au$, po drugi strani pa $BTAx = f(Ax)Bu$. Ker je $ATB = BTA$, sledi želeno.

Poglavje 3

Hilbertovi prostori

1. Naj bo X Hilbertov prostor, Y zaprt podprostor in $f \in X^*$. Pokažite, da obstajata taka linearna funkcionala $f_1, f_2 \in X^*$, da velja:

   (a) $f = f_1 + f_2$,

   (b) $f_1(Y^\perp) = \{0\}$ in $f_2(Y) = \{0\}$,

   (c) $\|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2$.

   Namig. Vemo, da je $X = Y \oplus Y^\perp$. Po Rieszovem izreku obstaja tak $a = a_1 + a_2 \in X$, $a_1 \in Y$, $a_2 \in Y^\perp$, da je $f(x) = \langle x, a\rangle$ za vsak $x \in X$ in $\|f\| = \|a\|$. Funkciji f_1 in f_2 definiramo s predpisoma $f_1(x) = \langle x, a_1\rangle$ ter $f_2(x) = \langle x, a_2\rangle$.

2. Naj bo S podprostor Hilbertovega prostora X. Pokažite, da je

$$(S^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{L}(S)}.$$

   Namig. Naj bosta $x \in S^\perp$ in $y \in \overline{\mathcal{L}(S)}$. Torej je $y = \lim_{n\to\infty} s_n$, $s_n \in \mathcal{L}(S)$. Potem je $\langle x, y\rangle = 0$. Iz tega sledi, da je $S^\perp \subseteq \overline{\mathcal{L}(S)}^\perp$. Ker je $S \subseteq \overline{\mathcal{L}(S)}$, je $\overline{\mathcal{L}(S)}^\perp \subseteq S^\perp$, iz česar sledi $(S^\perp)^\perp = (\overline{\mathcal{L}(S)}^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{L}(S)}$.

3. Naj bo H Hilbertov prostor in naj bo $A \in \mathcal{B}(H)$. Pokažite, da je

$$H = Ker A \oplus \overline{Im A^*}.$$

Namig. Ker je $ImA^* \subseteq \overline{ImA^*}$, sledi $\left(\overline{ImA^*}\right)^\perp \subseteq (ImA^*)^\perp$.

Naj bo $x \in KerA$ in naj bo $y \in \overline{ImA^*}$. Potem je $y = \lim_{n\to\infty} A^*y_n$, $\{A^*y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset ImA^*$. Ker je $\langle x, A^*y_n\rangle = \langle Ax, y_n\rangle = 0$, sledi $x \in (\overline{ImA^*})^\perp$. Torej je $KerA \subseteq \left(\overline{ImA^*}\right)^\perp$.

Naj bo $x \in (ImA^*)^\perp$. Potem je $0 = \langle x, A^*y\rangle = \langle Ax, y\rangle$ za vsak $y \in H$. Iz tega sledi, da je $Ax = 0$, kar pomeni $(ImA^*)^\perp \subseteq KerA$. S tem smo pokazali, da je $\left(\overline{ImA^*}\right)^\perp = KerA$. Ker je $H = \left(\overline{ImA^*}\right)^\perp \oplus \overline{ImA^*}$, sledi želeno.

4. Naj bosta X in Y zaprta podprostora Hilbertovega prostora H. Pokažite enakost
$$(X^\perp + Y^\perp)^\perp = X \cap Y.$$
Ali velja trditev tudi v primeru, ko prostora nista zaprta?

Namig. Naj bo $x \in (X^\perp + Y^\perp)^\perp$. Potem je $\langle x, x_1 + x_2\rangle = 0$, $x_1 \in X^\perp$, $x_2 \in Y^\perp$. Iz tega sledi, da je $x \in X \cap Y$.

Če je $x \in X \cap Y$, je $\langle x, x_1 + x_2\rangle = 0$ za vsak $x_1 \in X^\perp$ in $x_2 \in Y^\perp$. Torej je $x \in (X^\perp + Y^\perp)^\perp$.

Pokazana enakost ne velja v primeru, ko prostora X in Y nista zaprta. Primer: $X = Y$ je podprostor takih zaporedij iz l^2, ki imajo kvečjemu končno mnogo neničelnih členov.

5. Naj bo H Hilbertov prostor in naj bo $P \in \mathcal{B}(H)$ projektor. Pokažite, da je ImP zaprt podprostor. Pokažite tudi implikaciji $(a) \implies (b)$ ter $(b) \implies (c)$:

   (a) $P = P^*$,

   (b) $ImP = (KerP)^\perp$,

   (c) $\langle Px, x\rangle = \|Px\|^2$ za vsak $x \in H$.

Namig. Ker je $ImP = Ker(I - P)$, je ImP zaprt prostor.

((a) $\Rightarrow$ (b)) Najprej pokažemo, da je $KerP = (ImP)^\perp$, iz česar sledi želeno: $(KerP)^\perp = (ImP)^{\perp\perp} = ImP$.

((b) $\Rightarrow$ (c)) Ker je $H = ImP \oplus (ImP)^{\perp}$, je $H = ImP \oplus KerP$. Naj bo $x \in H$. Potem lahko x zapišemo kot $x = y + z$, kjer sta $y \in KerP$ in $z \in ImP$. Torej je $\|Px\|^2 = \langle Px, Px\rangle = \langle Pz, Pz\rangle = \langle z, Pz\rangle = \langle x, Px\rangle$.

6. Naj bo H Hilbertov prostor in $A \in \mathcal{B}(H)$ tak sebiadjungiran operator, da je $\|x\| \leq \|Ax\|$ za vsak $x \in H$. Pokažite, da je $(ImA)^{\perp} = 0$ in od tod izpeljite, da je A homeomorfizem.

Rešitev. Naj bo $x \in (ImA)^{\perp}$. Potem je $0 = \langle x, Ay\rangle = \langle Ax, y\rangle$ za vsak $y \in H$. Iz tega sledi, da je $\|x\| \leq \|Ax\| = 0$. Torej je $x = 0$.

V nadaljevanju pokažimo, da je ImA zaprt prostor. Naj bo $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno zaporedje v prostoru ImA z limito x. Glede na predpostavko, da je $\|x\| \leq \|Ax\|$ za vsak $x \in H$, je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo zaporedje v H in zato konvergentno z limito y. Torej je $x = \lim_{n\to\infty} Ax_n = Ay \in ImA$.

Glede na pokazano je $H = ImA \oplus (ImA)^{\perp} = ImA$. Prav tako ni težko preveriti injektivnosti operatorja A. Po izreku o odprti preslikavi sledi, da je A^{-1} zvezen operator. Torej je A homeomorfizem.

7. Naj bo H Hilbertov prostor, $A, B \in \mathcal{B}(H)$ in naj bo $C = A^*A + B^*B$. Pokažite:

   (a) $KerC = KerA \cap KerB$.

   (b) Lastne vrednosti operatorja C so nenegativna realna števila.

Namig.

(a) Naj bo $x \in KerC$. Potem je $0 = \langle A^*Ax, y\rangle + \langle B^*Bx, y\rangle$ za vsak $y \in H$. Sledi $\|Ax\|^2 + \|Bx\|^2 = 0$ in zato je $Ax = Bx = 0$. Torej je $x \in KerA \cap KerB$.

   Če je $x \in KerA \cap KerB$, je $(A^*A + B^*B)x = 0$ in zato je $x \in KerC$.

(b) Naj bo λ lastna vrednost operatorja C. Torej obstaja tak $0 \neq x \in H$, da je $Cx = \lambda x$. Iz tega sledi, da je $\lambda\langle x, x\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle$. Ker je $\langle Cx, x\rangle \geq 0$, je $\lambda \geq 0$.

8. Naj bo $U \in \mathcal{B}(H)$ unitarni operator in $P \in \mathcal{B}(H)$ ortogonalni projektor na Hilbertovem prostoru $(H, \langle ., . \rangle)$. Vpeljimo $\{., .\} : H \times H \to H$ s predpisom $\{x, y\} = \langle Ux + PUx, Uy \rangle$. Pokažite, da je $(H, \{., .\})$ Hilbertov prostor.

Namig. Ni težko preveriti da je $\{., .\}$ skalarni produkt na prostoru H. Potem je s predpisom $\{x, x\} = \|x\|_1^2$, $x \in H$, definirana norma na H. Ker sta normi $\|.\|$ in $\|.\|_1$ ekvivalentni,

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle \leq \|Ux\|^2 + \|PUx\|^2 = \|x\|_1^2 \leq (\|U\|^2 + \|PU\|^2)\|x\|,$$

je $(H, \{., .\})$ Hilbertov prostor.

9. Naj bo operator $P : l^2 \to l^2$ podan s predpisom

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots) = (0, x_2, 0, x_4, 0, \ldots, 0, x_{2n}, 0, \ldots).$$

Pokažite, da je P ortogonalni projektor. Poiščite $KerP$, $(KerP)^\perp$ in ImP.

Rešitev. Ni težko preveriti, da je $P \in \mathcal{B}(l^2)$ in $P^2 = P = P^*$, pri čemer upoštevamo, da je $\langle P\overline{x}, \overline{y} \rangle = \langle \overline{x}, P^*\overline{y} \rangle$, $\overline{x}, \overline{y} \in l^2$. Vidimo, da je $ImP = KerP$ in

$$\begin{aligned} KerP &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \mid x_{2n} = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}\}, \\ (KerP)^\perp &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) \mid x_{2n-1} = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

10. Za vsako naravno število n definiramo funkcional f_n na prostoru l^2 s predpisom

$$f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots) = x_1 + \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{n}}.$$

Pokažite, da je f_n omejen linearen funkcional in izračunajte njegovo normo. Ali je zaporedje $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergentno?

Rešitev. Ker je

$$f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \langle (x_1, x_2, x_3, \ldots), (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, \ldots) \rangle,$$

je $\|f_n\| = \|(1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, \ldots)\| = \sqrt{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}$ (Rieszov izrek). Naj bo $\overline{a}_n = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, \ldots)$. Vidimo, da je

$$\|f_n - f_m\|^2 = \|\overline{a}_n - \overline{a}_m\|^2 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{m+1}.$$

Iz tega sledi, da zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ni konvergentno.

11. Za vsako naravno število n definiramo funkcional f_n na prostoru l^2 s predpisom

$$f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} x_1 + \frac{1}{3^{\frac{2}{2}}} x_2 + \ldots + \frac{1}{3^{\frac{n-1}{2}}} x_{n-1} + \frac{1}{3^{\frac{n}{2}}} x_n.$$

Pokažite, da je f_n omejen linearen funkcional in izračunajte njegovo normo. Ali je zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno?

Namig. Zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je konvergentno.

12. Naj bo $U \in \mathcal{B}(H)$ unitaren in $A \in \mathcal{B}(H)$ poljuben operator na Hilbertovem prostoru H. Pokažite:

    (a) $\|UAx\| = \|Ax\|$ za vsak $x \in H$ in $\|UA\| = \|A\|$,

    (b) $\|Ux\| = \|x\|$ za vsak $x \in H$ in $\|AU\| = \|A\|$.

Namig.

(a) Vidimo, da je $\|UAx\|^2 = \langle UAx, UAx\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2$, iz česar sledi $\|UA\| = \|A\|$.

(b) Ker je $\frac{\|AUx\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\|\|Ux\|}{\|x\|} = \|A\|$, je $\|AU\| \leq \|A\|$. Po drugi strani pa opazimo, da je $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{\|AU(U^*x)\|}{\|U^*x\|} \leq \|AU\|$. Torej je $\|A\| \leq \|AU\|$.

13. Naj bo H realen Hilbertov prostor in naj bo $T : H \to H$ linearen operator. Pokažite, da je $\langle Tx, x\rangle = 0$ za vsak $x \in H$ natanko tedaj, ko je $T = -T^*$.

Rešitev. ($\Longrightarrow$) Vidimo, da je $\langle T(x+y), x+y\rangle = 0$ za vsak $x, y \in H$. Sledi $0 = \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle = \langle x, T^*y\rangle + \langle x, Ty\rangle = \langle x, (T^*+T)y\rangle$, kar nas privede do želene enakosti.

($\Longleftarrow$) Iz enakosti $\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle = -\langle Tx, x\rangle$ sledi želeno.

14. Naj bo H kompleksen Hilbertov prostor in naj bo $T : H \to H$ linearen operator. Pokažite, da je $\langle Tx, x\rangle = 0$ za vsak $x \in H$ natanko tedaj, ko je $T = 0$.

Rešitev. ($\Longrightarrow$) S pomočjo linearizacije (namesto x pišimo $x+y$, $y \in H$) vidimo, da je $0 = \langle T(x+y), x+y\rangle = \langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle$. Če namesto x pišemo ix, je $0 = \langle Tix, y\rangle + \langle Ty, ix\rangle$. Iz tega sledi $0 = i\langle Tx, y\rangle - i\langle Ty, x\rangle$. Torej je $0 = \langle Tx, y\rangle - \langle Ty, x\rangle$. Če seštejemo prvo in zadnjo enakost, dobimo $\langle Tx, y\rangle = 0$ za vse $x, y \in H$. Iz tega sledi želeno, $T = 0$.

15. Naj bo H kompleksen Hilbertov prostor in naj bo $T : H \to H$ tak linearen operator, da je $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ za vsak $x \in H$. Pokažite, da je $T^* = T$.

Rešitev. Ker je $\langle Tx, x\rangle \geq 0$, je $\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle x, Tx\rangle} = \langle x, Tx\rangle$ za vsak $x \in H$. Po drugi strani pa je $\langle Tx, x\rangle = \langle x, T^*x\rangle$. Iz tega sledi, da je $\langle (T - T^*)x, x\rangle = 0$ za vsak $x \in H$. Glede na prejšnjo nalogo je $T = T^*$.

16. Naj bo H kompleksen Hilbertov prostor. Pokažite, da je $N \in \mathcal{B}(H)$ normalen operator natanko tedaj, ko je $\|Nx\| = \|N^*x\|$ za vsak $x \in H$.

Namig. ($\Longrightarrow$) Očitno je $\|Nx\|^2 = \langle N^*Nx, x\rangle = \langle NN^*x, x\rangle = \|N^*x\|^2$ za vsak $x \in H$.

($\Longleftarrow$) Glede na predpostavko ni težko pokazati, da je

$$\langle (N^*N - NN^*)x, x\rangle = 0$$

za vsak $x \in H$. S pomočjo naloge 14 sledi želeno, $N^*N = NN^*$.

17. Naj bo H Hilbertov prostor in naj bosta $x, y \in H$ taka, da je

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|.$$

Pokažite, da je $\|x\|\|y\| = |\langle x, y\rangle|$.

Namig. Očitno je $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|$. Iz tega sledi $\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = 2\|x\|\|y\|$. Torej je $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\| = \mathrm{Re}\langle x, y\rangle \leq |\langle x, y\rangle|$.

18. Naj bo $(X, \langle ., .\rangle)$ realen ali kompleksen vektorski prostor s skalarnim produktom. Denimo, da za vsak $f \in X^*$ obstaja tak $y \in X$, da je $f(x) = \langle x, y\rangle$ za vsak $x \in X$. Pokažite, da je X poln prostor.

Namig. Naj bo $\varphi : X \to X^*$ preslikava definirana s predpisom $\varphi(a) = f_a$, kjer je $f_a(x) = \langle x, a\rangle$ za vsak $x \in X$. Pokažite, da je φ izometrija in upoštevajte, da je X^* poln prostor.

19. Naj bo $\mathcal{A}$ Banachova algebra.

    (a) Naj bo $a \in \mathcal{A}$ nilpotenten. Pokažite, da je $\sigma(a) = \{0\}$.

    (b) Naj bo $e \in \mathcal{A}$ idempotent in $e \neq 0, 1$. Pokažite, da je $\sigma(e) = \{0, 1\}$.

Namig.

(a) Ker obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $a^{n-1} \neq 0$ in $a^n = 0$, je a delitelj niča. Zato a ni obrnljiv. Torej je $0 \in \sigma(a)$. Naj bo $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$. Pokažite, da obstaja inverz elementa $a - \lambda 1$ (geometrijska vrsta), iz česar sledi želeno.

(b) Ker je $e(e-1) = 0$, $e \neq 0, 1$, elementa e in $e-1$ nista obrnljiva. Potem pa je $0, 1 \in \sigma(e)$. Naj bo $0, 1 \neq \lambda \in \mathbb{C}$. Ker je $e - \lambda 1$ obrnljiv element z inverzom $(e - \lambda 1)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(-1 + \frac{e}{1-\lambda})$, sledi želeno.

20. Naj bo $\mathcal{A}$ Banachova algebra in $a, b \in \mathcal{A}$. Pokažite, da je

$$\sigma(ab) - \{0\} = \sigma(ba) - \{0\}.$$

Namig. Naj bo $\lambda \neq 0$. Pokažite, da je $ab - \lambda$ obrnljiv element natanko tedaj, ko je $ba - \lambda$ obrnljiv element. Konkretno, če je $ba - 1$ obrnljiv element, potem je

$$(ab - 1)^{-1} = -(1 + a(1 - ba)^{-1}b).$$

21. Naj bo $\mathcal{A}$ Banachova algebra z enoto e in naj bo $x \in \mathcal{A}$ obrnljiv. Pokažite, da je $\lambda \in \sigma(x)$ natanko tedaj, ko je $\lambda^{-1} \in \sigma(x^{-1})$.

Namig. ($\Longrightarrow$) Naj bo $\lambda \in \sigma(x)$. Predpostavimo, da je $\lambda^{-1} \notin \sigma(x^{-1})$. Potem je $x^{-1} - \lambda^{-1}e$ obrnljiv element. Ker je $\lambda e - x = \lambda x(x^{-1} - \lambda^{-1}e)$, je $\lambda e - x$ obrnljiv element. S tem smo pokazali želeno.

22. Naj bo $\mathcal{A}$ Banachova algebra z enoto e, $\|e\| = 1$ in naj bo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ neničeln multiplikativen linearen funkcional. Pokažite:

   (a) $\varphi(e) = 1$,
   (b) $\varphi(a) \in \sigma(a)$ za vsak $a \in \mathcal{A}$,
   (c) $\|\varphi\| = 1$.

Rešitev.

   (a) Ker je $\varphi(a) = \varphi(ae) = \varphi(a)\varphi(e)$ za vsak $0 \neq a \in \mathcal{A}$, je $\varphi(e) = 1$.
   (b) Vidimo, da je $\varphi(a - \varphi(a)e) = \varphi(a) - \varphi(a) = 0$. Iz tega sledi, da $a - \varphi(a)e$ ni obrnljiv element in zato je $\varphi(a) \in \sigma(a)$.
   (c) Ker je $\varphi(e) = 1$, je $1 \leq \|\varphi\|$. S pomočjo točke (b) vidimo, da je $|\varphi(a)| \leq \|a\|$ za vsak $a \in \mathcal{A}$, iz česar sledi $\|\varphi\| \leq 1$.

23. Naj bo X kompleksna Banachova algebra z enoto 1 in naj bo $\varphi : X \to X$ taka linearna preslikava, da je $\varphi(1) = 1$. Pokažite, da sta naslednji dve trditvi ekvivalentni:

(a) $x \in X$ je obrnljiv natanko tedaj, ko je $\varphi(x)$ obrnljiv,

(b) $\sigma(\varphi(x)) = \sigma(x)$.

Rešitev. ((a) $\Rightarrow$ (b)) Naj bo $\lambda \in \sigma(\varphi(x))$. Potem element $\varphi(x) - \lambda 1 = \varphi(x - \lambda 1)$ ni obrnljiv. Glede na predpostavko $x - \lambda 1$ ni obrnljiv element in zato je $\lambda \in \sigma(x)$.

Naj bo $\lambda \in \sigma(x)$. Potem element $x - \lambda 1$ ni obrnljiv. Po predpostavki tudi $\varphi(x - \lambda 1) = \varphi(x) - \lambda 1$ ni obnljiv element. Iz tega sledi želeno.

((b) $\Rightarrow$ (a)) Predpostavimo, da x ni obrnljiv element. Torej je $0 \in \sigma(x) = \sigma(\varphi(x))$, iz česar sledi želeno. Podobno, če $\varphi(x)$ ni obrnljiv, je $0 \in \sigma(\varphi(x)) = \sigma(x)$ in zato x ni obrnljiv element.

24. Naj bo preslikava $A : l^2 \to l^2$ definirana s predpisom

$$A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Pokažite, da je $A \in \mathcal{B}(l^2)$ in izračunajte $\|A\|$, A^* ter $\sigma(A)$.

Rešitev. Norma operatorja A je 1, $A^*(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$, $\sigma(A) = \overline{K}(0, 1)$.

25. Naj bo preslikava $A : l^2 \to l^2$ definirana s predpisom

$$A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots).$$

Pokažite, da je $A \in \mathcal{B}(l^2)$ in izračunajte $\|A\|$, A^* ter $\sigma(A)$.

Rešitev. Norma operatorja A je 1, $A^*(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $\sigma(A) = \overline{K}(0, 1)$.

26. Naj bo preslikava $U : l^2 \to l^2$ definirana s predpisom

$$U(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (x_1, -x_2, x_3, -x_4, \ldots).$$

Pokažite, da je $U \in \mathcal{B}(l^2)$ in izračunajte $\|U\|$, U^* ter $\sigma(U)$.

Rešitev. Norma operatorja U je 1, $U^* = U$, $\sigma(U) = \{1, -1\}$.

27. Naj bo preslikava $T : l^2 \to l^2$ definirana s predpisom

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \ldots).$$

Pokažite, da je T zvezen linearen operator in izračunajte $\|T\|$, T^* ter $\sigma(T)$.

Rešitev. Norma operatorja T je 1, $T^* = -T$, $\sigma(T) = \{i, -i\}$.

28. Naj bo preslikava $A : l^2 \to l^2$ definirana s predpisom

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3 + x_4, x_3 - x_4, \ldots).$$

Pokažite, da je $A \in \mathcal{B}(l^2)$ in izračunajte $\|A\|$, A^* ter $\sigma(A)$.

Rešitev. Norma operatorja A je $\sqrt{2}$, $A^* = A$, $\sigma(A) = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

29. Naj bo $A : l^2 \to l^2$ operator definiran s predpisom

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 - x_2, x_3 + 2x_4, 2x_3 - x_4, \ldots).$$

Pokažite, da je $A \in \mathcal{B}(l^2)$ in izračunajte $\|A\|$, A^* ter $\sigma(A)$.

Rešitev. Norma operatorja A je $\sqrt{5}$, $A^* = A$, $\sigma(A) = \{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$.

30. Naj bosta a in b neničelna vektorja neskončno razsežnega Hilbertovega prostora H in naj bo $A : H \to H$ linearen operator definiran s predpisom $Ax = \langle x, a \rangle b$. Pokažite, da je A omejen linearen operator. Izračunajte njegovo normo ter A^*. Kdaj je A normalen in kdaj sebiadjungiran operator? Kaj sta jedro in zaloga vrednosti operatorja A? Izračunajte $\sigma(A)$.

Namig. Norma operatorja A je $\|a\|\|b\|$, $ImA = \{\lambda b \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$, $KerA = \{a\}^{\perp}$. Ker je

$$\langle Ax, y \rangle = \langle \langle x, a \rangle b, y \rangle = \langle x, a \rangle \langle b, y \rangle = \langle x, \langle y, b \rangle a \rangle = \langle x, A^* y \rangle,$$

je $A^* x = \langle x, b \rangle a$. Operator A je normalen, ko je $b = \lambda a$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Operator A je sebi adjungiran, ko je $b = \lambda a$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Naj bo $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$. Potem sta 0 in $\langle b, a \rangle$ lastni vrednosti operatorja A. Naj bo $\lambda \neq 0, \langle b, a \rangle$. Iz enakosti $(A - \lambda I)x = y$ sledi $\langle x, a \rangle \langle b, a \rangle = \lambda \langle x, a \rangle + \langle y, a \rangle$. S pomočjo tega lahko pokažemo, da je $x = \frac{1}{\lambda}(\frac{\langle y, a \rangle}{\langle b, a \rangle - \lambda} b - y)$. Torej je operator $A - \lambda I$ obrnljiv. S tem smo pokazali, da je $\sigma(A) = \{0, \langle b, a \rangle\}$.

31. Naj bo H Hilbertov prostor, $\dim H \geq 4$ in naj bodo $a, b, c \in H$ linearno neodvisni ter paroma ortogonalni vektorji. Definirajmo operator $A : H \to H$ s predpisom

$$Ax = \langle x, a \rangle a + \langle x, b \rangle b + \langle x, c \rangle c.$$

Pokažite, da je $A \in \mathcal{B}(H)$ in izračunajte $\sigma(A)$ ter A^*. Ali je A injektiven operator? Ali je surjektiven?

Namig. Lastne vrednosti operatorja A so $0, \|a\|^2, \|b\|^2, \|c\|^2$. Če λ ni lastna vrednost operatorja A, potem iz enakosti $(A - \lambda I)x = y$ sledi $\langle x, a \rangle = \frac{\langle y, a \rangle}{\|a\|^2 - \lambda}$, $\langle x, b \rangle = \frac{\langle y, b \rangle}{\|b\|^2 - \lambda}$ in $\langle x, c \rangle = \frac{\langle y, c \rangle}{\|c\|^2 - \lambda}$. Torej je

$$x = \frac{1}{\lambda}(\langle x, a \rangle a + \langle x, b \rangle b + \langle x, c \rangle c - y),$$

kar pomeni, da je operator $A - \lambda I$ obrnljiv. Iz tega sledi, da je $\sigma(A) = \{0, \|a\|^2, \|b\|^2, \|c\|^2\}$.

Operator A ni niti injektiven niti surjektiven, saj je $\dim H \geq 4$, $A = A^*$.

32. Naj bo H kompleksen Hilbertov prostor in $A \in \mathcal{B}(H)$ tak operator, da je $A^* = -A$.

 (a) Pokažite, da iz $A^2 = 0$ sledi $A = 0$.
 (b) Naj bo λ lastna vrednost operatorja A. Pokažite, da je $\lambda = it$ za nek $t \in [-\|A\|, \|A\|]$.

Namig.

 (a) Iz enakosti $0 = \langle x, A^2 x\rangle = \langle A^* x, Ax\rangle$ sledi želeno.
 (b) Pokažite, da je $\lambda\langle x, x\rangle = -\overline{\lambda}\langle x, x\rangle$, iz česar sledi želeno.

33. Naj bo H Hilbertov prostor in naj bo $A \in \mathcal{B}(H)$ tak normalen operator, da je $A^2 = -A$. Pokažite:

 (a) $\langle A^*Ax, A^*y\rangle = -\langle A^*x, A^*y\rangle$, $x, y \in H$,
 (b) $A = A^*$,
 (c) $\{0, -1\} \subseteq \sigma(A)$.

Rešitev.

 (a) Vidimo, da je

$$\langle A^*Ax, A^*y\rangle = \langle AA^*x, A^*y\rangle = \langle A^*x, (A^2)^*y\rangle = -\langle A^*x, A^*y\rangle$$

 za vsak $x, y \in H$.
 (b) Glede na zgornjo enakost opazimo, da je

$$0 = \langle (A^*A + A^*)x, A^*y\rangle = \langle A^*(A+I)x, A^*y\rangle$$

 za vsak $x, y \in H$. Pišimo $(A+I)x$ namesto y. Potem je $A^*(A+I)x = 0$ za vsak $x \in H$, kar nas privede do želene enakosti, saj je $0 = A^*A + A^* = A^*A + A$.
 (c) Naj bo λ lastna vrednost operatorja A. Potem obstaja tak $0 \neq x \in H$, da je $Ax = \lambda x$. Opazimo, da je $\lambda\langle x, x\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle$. Upoštevajmo predpostavko, da je $A^2 = -A$, kar nas privede do tega, da je $\lambda = 0$ ali $\lambda = -1$.

34. Naj bo H Hilbertov prostor in naj bo $A \in \mathcal{B}(H)$ tak operator, da je $A^3 = A^*$.

(a) Pokažite, da iz $A^4 = 0$ sledi $A = 0$.

(b) Poiščite lastne vrednosti operatorja A.

(c) Določite spekter operatorja A, če je $A^4 = I$.

Rešitev.

(a) Ker je $\langle Ax, Ax \rangle = \langle x, A^4 x \rangle = 0$, je $Ax = 0$ za vsak $x \in H$.

(b) Lastne vrednosti operatorja A so $0, 1, -1, i, -i$.

(c) Spekter operatorja A je $\sigma(A) = \{1, -1, i, -i\}$.

35. Naj bo H Hilbertov prostor in naj bo $A \in \mathcal{B}(H)$ pozitiven operator. Pokažite:

(a) $\sup\{\langle Ax, x \rangle \mid \|x\| = 1\} \leq 1$ natanko tedaj, ko je $\langle Ax, x \rangle \leq \langle x, x \rangle$,

(b) če je λ lastna vrednost operatorja A, je $0 \leq \lambda$.

Rešitev.

(a) ($\Longrightarrow$) Če je $\|x\| = 1$, očitno sledi želeno. Naj bo $\|x\| \neq 1$. Potem je $\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \rangle = 1$. Sledi $\langle A\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|} \rangle \leq 1$. Torej je $\langle Ax, x \rangle \leq \langle x, x \rangle$.
($\Longleftarrow$) Po predpostavki je $\langle Ax, x \rangle \leq \langle x, x \rangle$. Če je $\|x\| = 1$, sledi želeno.

(b) Ker je λ lastna vrednost operatorja A, obstaja tak $0 \neq x \in H$, da je $Ax = \lambda x$. Potem je $\langle Ax, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle$. Po drugi strani pa je $\langle x, Ax \rangle = \overline{\lambda} \langle x, x \rangle$. Iz tega sledi želeno.

36. Naj bo H Hilbertov prostor in $A \in \mathcal{B}(H)$. Predpostavimo, da je AA^* kompakten operator. Pokažite, da je potem kompakten tudi operator A.

Namig. Naj bo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ omejeno zaporedje v H. Ker je AA^* kompakten operator, vsebuje zaporedje $\{A^*Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno podzaporedje $\{A^*Ax_{n_p}\}_{p\in\mathbb{N}}$. S pomočjo neenakosti

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle \leq \|A^*Ax\|\|x\|$$

opazimo, da je zaporedje $\{Ax_{n_p}\}_{p\in\mathbb{N}}$ Cauchyjevo in zato konvergentno.

37. Naj bo H Hilbertov prostor in $A \in \mathcal{B}(H)$.

    (a) Pokažite, da za vsak $x \in H$ velja

    $$\|Ax\|^4 \leq \|x\|^3\|(A^*A)^2x\|.$$

    (b) Naj bo $(A^*A)^2$ kompakten operator. Pokažite, da je potem kompakten tudi operator A.

Namig.

(a) Očitno je

$$\begin{aligned}\|Ax\|^4 &= (\langle x, A^*Ax\rangle)^2 \leq \|x\|^2\|A^*Ax\|^2\\ &= \|x\|^2\langle x, (A^*A)^2x\rangle \leq \|x\|^3\|(A^*A)^2x\|.\end{aligned}$$

(b) Naj bo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ omejeno zaporedje v H. S pomočjo neenakosti (a) in predpostavke pokažemo, da vsebuje zaporedje $\{(A^*A)^2x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno podzaporedje $\{(A^*A)^2x_{n_p}\}_{p\in\mathbb{N}}$. Iz tega sledi (glejte točko (a)), da je tudi zaporedje $\{Ax_{n_p}\}_{p\in\mathbb{N}}$ konvergentno.

38. Naj bosta X in Y Banachova prostora in $A : X \to Y$ kompakten linearen operator. Pokažite, da je ImA zaprt podprostor Y natanko tedaj, ko je A končnega ranga.

Namig. ($\Longleftarrow$) Vsak končno razsežen podprostor normiranega prostora je zaprt. Če je torej operator A končnega ranga, potem je ImA zaprt podprostor prostora Y.

($\Longrightarrow$) Naj bo $A : X \to Y$ tak kompakten linearen operator, da je ImA zaprt podprostor prostora Y. Linearen operator $A : X \to ImA$ je surjektiven in omejen. Po izreku o odprti preslikavi je $A(K(0,1))$, kjer $K(0,1)$ označuje odprto enotsko kroglo s središčem v 0, odprta podmnožica ImA. Torej obstaja neka zaprta krogla $\overline{K}(0,\epsilon) \subseteq \overline{A(K(0,1))}$. Ker je $\overline{A(K(0,1))}$ kompaktna množica in je zaprt podprostor kompaktnega prostora kompakten, je $\overline{K}(0,\epsilon)$ kompaktna podmnožica ImA in je zato $\dim(ImA) < \infty$.

39. Naj bosta X in Y Banachova prostora ter naj bo $A : X \to Y$ zvezen, surjektiven operator. Pokažite: obstaja tak $m > 0$, da za vsak $y \in Y$ obstaja tak $x \in X$, da je $Ax = y$ in $\|x\| \leq m\|Ax\|$.

Rešitev. Naj bo $K(0,1) = \{x \in X \mid \|x\| < 1\}$. Po izreku o odprti preslikavi operator A slika odprte množice v odprte množice. Potem obstaja taka odprta množica $K(0,r)$, da je $K(0,r) \subseteq A(K(0,1))$. Naj bo $0 \neq y \in Y$ in pišimo $z = \frac{yr}{\|y\|2}$. Torej je $\|z\| = \frac{r}{2}$ in zato je $z \in A(K(0,1))$. Iz tega sledi, da obstaja tak $x_0 \in K(0,1)$, da je $z = Ax_0$. Naj bo $x = x_0\frac{\|y\|2}{r}$. Potem je $Ax = y$ in $\|x\| = \frac{2}{r}\|y\|\|x_0\| \leq \frac{2}{r}\|Ax\|$.

40. Naj bo vektorski prostor X Banachov za normi $\|.\|_1$ in $\|.\|_2$. Predpostavimo, da je $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$ za vsak $x \in X$. Pokažite, da sta tedaj normi ekvivalentni.

Namig. Ker je $id : (X, \|.\|_2) \to (X, \|.\|_1)$ linearna, zvezna in bijektivna preslikava (upoštevajte, da je $\|id(x)\|_1 = \|x\|_1 \leq \|x\|_2$ za vsak $x \in X$), je po izreku o odprti preslikavi id^{-1} zvezna preslikava. Sledi $\|x\|_2 = \|id^{-1}(x)\|_2 \leq m\|x\|_1$.

41. Naj bo H Hilbertov prostor in $T \in \mathcal{B}(H)$. Pokažite:

   (a) $KerT^* = (ImT)^\perp$,

   (b) $\|(I + T^*T)x\| \geq \|x\|$,

   (c) $I + T^*T$ je obrnljiv operator v $\mathcal{B}(H)$.

Rešitev.

(a) Naj bo $x \in KerT^*$. Potem je $0 = \langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ za vsak $y \in H$. Iz tega sledi, da je $x \in (ImT)^{\perp}$.

Naj bo $x \in (ImT)^{\perp}$. Potem je $0 = \langle x, Ty\rangle = \langle T^*x, y\rangle$ za vsak $y \in H$. Torej je $T^*x = 0$ in zato je $x \in KerT^*$.

(b) Vidimo, da je

$$\|(I+T^*T)x\|^2 = \langle (I+T^*T)x, (I+T^*T)x\rangle = \|x\|^2+\|T^*Tx\|^2+2\|Tx\|^2,$$

iz česar sledi željeno.

(c) S pomočjo točke (b) opazimo, da je operator $I + T^*T$ injektiven, s pomočjo točke (a) pa pokažemo surjektivnost operatorja $I + T^*T$. Upoštevajte, da je

$$H = Im(I + T^*T) \oplus (Im(I + T^*T))^{\perp},$$

$$Ker(I + T^*T) = (Im(I + T^*T))^{\perp} = \{0\}.$$

Po izreku o odprti preslikavi sledi, da je $I + T^*T$ obrnljiv operator.

42. Naj bo X Banachov prostor in naj bosta Y ter Z taka zaprta podprostora X, da je $X = Y \oplus Z$. Pokažite, da sta prostora X/Y in Z linearno homeomorfna.

Rešitev. Najprej zapišimo izrek:

Če je Y zaprt podprostor normiranega prostora X, potem je s predpisom

$$\|x + Y\| = inf_{y\in Y}\|x + y\|$$

definirana norma na X/Y. Če je X Banachov prostor, potem je tudi X/Y Banachov prostor.

Definirajmo preslikavo $\varphi : Z \to X/Y$ s predpisom $\varphi(z) = z + Y$. Naj bo $z \in Ker\varphi$. Potem je $z \in Y \cap Z = \{0\}$. S tem smo pokazali, da je preslikava φ injektivna. Prav tako ni težko preveriti, da je surjektivna. Namreč, naj bo $x + Y \in X/Y$. Ker je $X = Y \oplus Z$, je $x = y + z$ za neka $y \in Y$, $z \in Z$. Iz tega sledi, da je $x - z \in Y$ in zato je $x + Y = z + Y$.

Torej obstaja tak $z \in Z$, da je $\varphi(z) = x + Y$. Na koncu še preverimo, da je $\|\varphi\| \leq 1$:

$$\|\varphi(z)\| = inf_{y \in Y}\|z + y\| \leq inf_{y \in Y}(\|z\| + \|y\|) \leq \|z\|.$$

Torej je φ zvezna preslikava. Po izreku o odprti preslikavi je φ^{-1} zvezna preslikava.

43. Naj bo X Banachov prostor in P projektor na X. Pokažite, da je P zvezen operator natanko tedaj, ko sta $KerP$ in ImP zaprta podprostora X.

Rešitev. ($\Longleftarrow$) Predpostavimo, da sta $KerP$ in ImP zaprta podprostora X. Naj bo $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje v X z limito 0 in $\{Px_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje v X z limito y. Po izreku o zaprtem grafu zadošča pokazati, da je $y = 0$. Ker je $P(Px_n - x_n) = 0$, je $Px_n - x_n \in KerP$. Glede na predpostavko sledi, da je $y \in KerP$. Potem je $0 = Py = y$.

($\Longrightarrow$) Predpostavimo, da je P zvezen projektor. Naj bo $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ zaporedje v $KerP$ z limito x. Potem je $x \in KerP$. Namreč,

$$Px = P \lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty} Px_n = 0.$$

Prav tako je ImP zaprt podprostor prostora X, saj je $Ker(P - I) = ImP$.

44. Naj bosta P in Q taka projektorja na Banachovem prostoru X, da je $PQ = -QP$. Pokažite, da je $P + Q$ zvezen operator natanko tedaj, ko sta $Im(P + Q)$ in $Ker(P + Q)$ zaprta podprostora prostora X.

Namig. Pokažite, da je $P + Q$ projektor in upoštevajte prejšnjo nalogo.

45. Naj bo X Banachov prostor, $A : X \to X$ linearen operator in naj bo $B \in \mathcal{B}(X)$ tak bijektiven operator, da je $BA \in \mathcal{B}(X)$. Pokažite, da je potem tudi $A \in \mathcal{B}(X)$.

Namig. Glede na predpostavko, da je $B \in \mathcal{B}(X)$ bijektiven operator, obstaja $B^{-1} \in \mathcal{B}(X)$. Iz tega sledi, da je $A = B^{-1}BA \in \mathcal{B}(X)$. Nalogo lahko rešimo tudi s pomočjo izreka o zaprtem grafu.

46. Naj bo X Banachov prostor, $A : X \to X$ linearen operator in naj bo $B \in \mathcal{B}(X)$ tak injektiven operator, da je $BA \in \mathcal{B}(X)$. Pokažite, da je potem tudi $A \in \mathcal{B}(X)$.

Rešitev. Naj bo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ zaporedje z limito 0 in $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ zaporedje z limito y. Po izreku o zaprtem grafu zadošča pokazati, da je $y = 0$. Ker je B injektiven operator in je $By = B(\lim_{n\to\infty} Ax_n) = \lim_{n\to\infty} B(Ax_n) = BA(\lim_{n\to\infty} x_n) = 0$, je $y = 0$.

47. Naj bo X Banachov prostor in $A : X \to X$ linearen operator. Predpostavimo, da za vsak $f \in X^*$ velja $f \circ A \in X^*$. Pokažite, da je $A \in \mathcal{B}(X)$.

Rešitev. Naj bo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ zaporedje z limito 0 in $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ zaporedje z limito y. Po izreku o zaprtem grafu zadošča pokazati, da je $y = 0$. Predpostavimo nasprotno. Potem po posledici Hahn Banachovega izreka obstaja tak linearen funkcional $f \in X^*$, da je $f(y) \neq 0$. Ker je $f \circ A \in X^*$ in zaporedje $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira k 0, je $\lim_{n\to\infty} f(Ax_n) = 0$. Iz tega sledi, da je $f(y) = f(\lim_{n\to\infty} Ax_n) = \lim_{n\to\infty} f(Ax_n) = 0$. S tem smo prišli do protislovja. Torej je $y = 0$ in trditev je dokazana.

48. Naj bo X Banachov prostor in naj bo $\mathcal{F}$ podmnožica $\mathcal{B}(X)$ z lastnostjo: za vsak $0 \neq x \in X$ obstaja tak $A \in \mathcal{F}$, da je $Ax \neq 0$. Naj bo $B : X \to X$ tak linearen operator, da je $f \circ AB \in X^*$ za vsak $f \in X^*$ in $A \in \mathcal{F}$. Pokažite, da je $B \in \mathcal{B}(X)$.

Namig. Glede na prejšnjo nalogo sledi, da je $AB \in \mathcal{B}(X)$. S pomočjo izreka o zaprtem grafu pokažite, da je $B \in \mathcal{B}(X)$.

49. Naj bo X Banachov prostor in naj bo $0 \neq u \in X$.

(a) Za vsak $f \in X^*$ naj bo $T_f : X \to X$ operator definiran s predpisom $T_f x = f(x)u$. Pokažite, da je $T_f \in \mathcal{B}(X)$.

(b) Naj bo $A : X \to X$ tak linearen operator, da je $T_f A \in \mathcal{B}(X)$ za vsak $f \in X^*$. Pokažite, da je $A \in \mathcal{B}(X)$.

Namig. (b) Naj bo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ zaporedje z limito 0 in $\{Ax_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ zaporedje z limito y. Po izreku o zaprtem grafu zadošča pokazati, da je $y = 0$. Ker je $T_f A \in B(X)$ za vsak $f \in X^*$, ni težko videti, da je $0 = T_f(y) = f(y)u$ za vsak $f \in X^*$, iz česar sledi želeno.

50. Naj bo X Banachov prostor in naj bo $A : X \to X$ tak linearen operator, da je $AT - TA \in \mathcal{B}(X)$ za vsak $T \in \mathcal{B}(X)$. Pokažite, da je $A \in \mathcal{B}(X)$.

Rešitev. Naj bo $0 \neq u \in X$ tak, da je $\|u\| = 1$. Za vsak $f \in X^*$ definirajmo operator $T_f : X \to X$ s predpisom $T_f x = f(x)u$. Ker je $T_f \in \mathcal{B}(X)$, je $AT_f - T_f A \in \mathcal{B}(X)$ za vsak $f \in X^*$. Očitno je $(AT_f - T_f A)x = f(x)Au - f(Ax)u$ za vsak $x \in X$. Potem sledi

$$|f(Ax)| \leq \|AT_f - T_f A\|\|x\| + \|f\|\|Au\|\|x\|,$$

kar pomeni, da je $f \circ A \in X^*$ za vsak $f \in X^*$. Glede na nalogo 47 sledi želeno.

51. Naj bodo X, Y in Z Banachovi prostori, $A : Y \to Z$ linearen operator in $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ surjektiven operator. Predpostavimo, da je AT zvezen operator. Pokažite, da je potem tudi A zvezen operator.

Namig. Naj bo $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ zaporedje z limito 0 in $\{Ay_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Z$ zaporedje z limito z. Po izreku o zaprtem grafu zadošča pokazati, da je $z = 0$. Ker je T surjektiven operator, obstaja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, da je $Tx_n = y_n$. Glede na nalogo 39 je $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno zaporedje z limito 0. Iz tega sledi $0 = AT \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} ATx_n = \lim_{n\to\infty} Ay_n = z$.

52. Naj bodo X_1, X_2 in X_3 taki zaprti podprostori Banachovega prostora X, da je $X = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$. Predpostavimo, da so $P_i : X \to X_i$, $i = 1, 2, 3$,

taki projektorji, da je $ImP_i = X_i$ ter $P_i|X_j = 0$, $i \neq j$. Pokažite, da so P_1, P_2, P_3 omejeni operatorji.

Namig. Pokažimo, da je P_1 zaprt operator. Naj bo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ zaporedje z limito 0 in $\{P_1x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ zaporedje z limito y. Po izreku o zaprtem grafu zadošča pokazati, da je $y = 0$. Glede na predpostavko lahko vsak $x \in X$ zapišemo kot $x = x_1 + x_2 + x_3$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $x_3 \in X_3$. Potem je $P_1x = P_1x_1 + P_1x_2 + P_1x_3 = P_1x_1 = x_1$. Podobno vidimo, da je $P_2x = x_2$ in $P_3x = x_3$. Torej je $x = P_1x + P_2x + P_3x$. Upoštevajmo pravkar pokazano: iz enakosti $x_n = P_1x_n + P_2x_n + P_3x_n$ sledi $0 = y + z$, kjer je $y \in X_1$ in $z = \lim_{n\to\infty}(P_2x_n + P_3x_n)$. Torej je $0 = P_1y + P_1z = P_1y = y$. Podobno pokažemo, da sta P_2 in P_3 zaprta operatorja.

53. Naj bo A kompleksna Banachova algebra z involucijo $*$. Pokažite, da je $*$ zvezna preslikava natanko tedaj, ko je $H(A) = \{x \in A \mid x^* = x\}$ zaprta množica.

Rešitev. ($\Longrightarrow$) Predpostavimo, da je involucija $*$ zvezna preslikava. Naj bo $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno zaporedje v $H(A)$ z limito h. Potem je

$$h = \lim_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} h_n^* = (\lim_{n\to\infty} h_n)^* = h^*.$$

S tem smo pokazali, da je $h \in H(A)$, kar pomeni, da je $H(A)$ zaprta množica.

($\Longleftarrow$) Predpostavimo sedaj, da je $H(A)$ zaprta množica. Naj bo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ zaporedje z limito x in $\{x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ zaporedje z limito y. Glede na izrek o zaprtem grafu zadošča pokazati, da je $y = x^*$. Očitno je $\lim_{n\to\infty}(x_n + x_n^*) = x + y$. Ker je $H(A)$ zaprta množica in je $\{x_n + x_n^*\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H(A)$, je $x + y \in H(A)$. Prav tako vidimo, da je $\{i(x_n^* - x_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H(A)$. Zato je $i(y - x) \in H(A)$. Torej je $x + y = x^* + y^*$ in $i(y - x) = -i(y^* - x^*)$. Množenje zadnje enakosti s kompleksnim številom i nas privede do identitete $x - y = y^* - x^*$. Iz tega sledi, da je $y = x^*$.

Literatura

[1] M. Hladnik, *Naloge in primeri iz funkcionalne analize in teorije mere*, Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo, Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, Ljubljana 1985

[2] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza, Elementi teorije operatora*, Školska knjiga, Zagreb 1981

[3] I. Vidav, *Linearni operatorji v Banachovih prostorih*, Univerza v Ljubljani, Inštitut za matematiko fiziko in mehaniko, Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo, Ljubljana 1982