Univerza v Mariboru
Fakulteta za logistiko

Zbirka nalog iz matematičnih metod 2

MAJA FOŠNER in BENJAMIN MARCEN

Celje 2012

Naslov: Zbirka nalog iz matematičnih metod 2

Avtor: izred. prof. dr. Maja Fošner in Benjamin Marcen

Recenzent: izred. prof. dr. Ajda Fošner

Fakulteta za logistiko Celje - Krško, 2012

CIP - Katložni zapis o publikaciji Univerzitetna knjižnica Maribor

51(075.8)(076.1)

FOŠNER, Maja Zbirka nalog iz matematičnih metod 2 / [avtorja] Maja Fošner in Benjamin Marcen. - Celje ; Krško : Univerza v Mariboru, Fakulteta za logistiko, 2012

Način dostopa (URL):
http://fl.uni-mb.si/attachments/zbirka_nalog_MM2_Fosner_Marcen.pdf

ISBN 978-961-6562-52-2
1. Marcen, Benjamin
COBISS.SI-ID 70142977

Predgovor

Zbirka nalog iz Matematičnih metod II vsebuje naloge in rešitve celotne snovi, ki je po učnem načrtu predpisana za študente drugega letnika univerzitetnega študijskega programa Tehniška logistika na Fakulteti za logistiko Univerze v Mariboru. Prav tako vsebuje zbirka nalog primere izpitov, kar dodatno omogoča temeljit pregled predmeta Matematične metode II.

Namen zbirke nalog je z nalogami podkrepiti snov učbenika Matematične metode II in na ta način boljše razumevanje in ustrezna uporaba snovi, v povezavi z ostalimi aktivnostmi v sklopu predmeta Matematične metode II.

Kazalo

Poglavje 1

Odvod

1.1 Odvod, geometrijski pomen odvoda, približno računanje

1. Izračunajte odvode naslednjih funkcij:

   (a) $(2x^4 + 3x - 2 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2})$

   (b) $(-2\sqrt{\sqrt{16x}} + 4x)$

   (c) $\sqrt{x\sqrt{x}}(1 - \frac{1}{x})$

   (d) $(x\sqrt[2]{x^3} + 2) \cdot (\frac{2}{x^4} + 3x)$

   (e) $\frac{x^3+x-2}{3-x^2}$

   (f) $\frac{\ln x}{e^2 x}$

   (g) $\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+x)^2}}$

   (h) $\frac{e^{2x+3}}{x^2-3x-4}$

   (i) $\frac{\sin(x^2)}{x-3}$

   (j) $\ln(\cos(\frac{x^2+1}{x}))$

   (k) $\tan(\ln(4x))$

   (l) $\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}$

Rešitev.

(a) Funkcijo preoblikujemo.
$f(x) = 2x^4 + 3x - 2 + 2x^{-1} - x^{-2}$.

Odvajamo vsak člen posebej.
$f'(x) = 2 \cdot 4x^3 + 3 + 2 \cdot (-1)x^{-2} - (-2)x^{-3} = 8x^3 + 3 - 2x^{-2} + 2x^{-3}$.

(b) Funkcijo preoblikujemo.
$f(x) = -2 \cdot ((16x)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} + 4x = -2 \cdot ((16x)^{\frac{1}{4}}) + 4x =$
$-2 \cdot 2 \cdot (x)^{\frac{1}{4}} + 4x$.

Odvajamo.
$f'(x) = -4 \cdot \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + 4 = -x^{-\frac{3}{4}} + 4$.

(c) Izraz preoblikujemo.
$f(x) = (x \cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \cdot (1 - \frac{1}{x}) = x^{\frac{3}{4}} \cdot (1 - \frac{1}{x}) = x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{1}{4}}$.

Odvajamo.
$f'(x) = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}$.

(d) Funkcijo preoblikujemo.
$f(x) = (x \cdot x^{\frac{3}{2}}) + 2) \cdot (2x^{-4} + 3x) = (x^{\frac{5}{2}} + 2) \cdot (2x^{-4} + 3x) =$
$2x^{-\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{7}{2}} + 4x^{-4} + 6x$.

Odvajamo.
$f'(x) = 2 \cdot (-\frac{3}{2})x^{-\frac{5}{2}} + 3 \cdot \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} + 4 \cdot (-4)x^{-5} + 6 = -3x^{-\frac{5}{2}} + \frac{21}{2}x^{\frac{5}{2}} +$
$-16x^{-5} + 6$.

(e) Odvajamo kot kvocient funkcij.
$f'(x) = \frac{(3x^2+1)\cdot(3-x^2)-(x^3+x-2)(-2x)}{(3-x^2)^2} = \frac{(9x^2-3x^4+3-x^2)-(-2x^4-2x^2+4x)}{(3-x^2)^2} =$
$\frac{-x^4+10x^2-4x+3}{(3-x^2)^2}$.

(f) Odvajamo kot kvocient funkcij.
$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot e^2 x - \ln x \cdot e^2}{(e^2 x)^2} = \frac{e^2 - e^2 \ln x}{e^4 x^2} = \frac{1-\ln x}{e^2 x^2}$.

(g) Funkcijo preoblikujemo nato pa odvajamo kot kvocient.
$f(x) = \frac{x^2}{x^2+x}$.

$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2+x)-x^2\cdot(2x+1)}{(x^2+x)^2} = \frac{2x^3+2x^2-2x^3-x^2}{(x^2+x)^2} = \frac{x^2}{x^2\cdot(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$.

(h) Odvajamo kot kvocient funkcij.

e^{2x+3} odvajamo kot sestavljeno funkcijo.

$f'(x) = \frac{e^{2x+3}(2)\cdot(x^2-3x-4)-e^{2x+3}(2x-3)}{(x^2-3x-4)^2} = \frac{e^{2x+3}(2x^2-8x-5)}{(x^2-3x-4)^2}$.

(i) Odvajamo kot kvocient funkcij.

$\sin(x^2)$ odvajamo kot sestavljeno funkcijo.

$f'(x) = \frac{\cos(x^2)(2x)(x-3)-\sin(x^2)\cdot(1)}{(x-3)^2} = \frac{2x^2\cos(x^2)-6x\cos(x^2)-\sin(x^2)}{(x-3)^2}$.

(j) Odvajamo kot sestavljeno funkcijo.

$f'(x) = \frac{1}{\cos(\frac{x^2+1}{x})}\cdot(\cos(\frac{x^2+1}{x}))' = \frac{1}{\cos(\frac{x^2+1}{x})}\cdot(-\sin(\frac{x^2+1}{x}))\cdot(\frac{x^2+1}{x})' =$
$\frac{1}{\cos(\frac{x^2+1}{x})}\cdot(-\sin(\frac{x^2+1}{x}))\cdot(\frac{(x^2-1)}{x^2}) = -\frac{(x^2-1)\tan(x+\frac{1}{x})}{x^2}$.

(k) Odvajamo kot sestavljeno funkcijo.

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(\ln(4x))}\cdot(\ln(4x))' = \frac{1}{\cos^2(\ln(4x))}\cdot\frac{1}{4x}\cdot(4x)' = \frac{1}{\cos^2(\ln(4x))}\cdot 4\frac{1}{4x} =$
$\frac{1}{x\cos^2(\ln(4x))}$.

(l) Odvajamo kot kvocient.

$f'(x) = \frac{2\cos x(-\sin x)\cdot(1+\cos(2x))-(1+\cos^2 x)\cdot(-\sin(2x))(2)}{(1+\cos(2x))^2}$.

2. Z upoštevanjem pravil za odvajanje izračunajte odvode naslednjih funkcij in vrednost odvoda v x_0.

   (a) $(2x^2+5x-3)^8$, $x_0=0$
   (b) e^{2x-4}, $x_0=2$
   (c) $x\sqrt{x^2+9}$, $x_0=4$
   (d) $\frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}$, $x_0=-1$
   (e) $\tan(2x^2), x_0=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
   (f) $\frac{\sin x \cdot \cos^2 x}{1+\cos^2 x}$, $x_0=\frac{\pi}{2}$
   (g) $\frac{1}{x\cdot \ln x}$, $x_0=e$
   (h) xe^{2x^2+3}, $x_0=1$
   (i) $\frac{\ln^3 x}{4x}$, $x_0=1$

Rešitev.

(a) Odvajamo kot sestavljeno funkcijo.

$$f'(x)=8(2x^2+5x-3)^7(4x+5),\ f'(0)=87480.$$

(b) Odvajamo kot sestavljeno funkcijo.

$$f'(x)=e^{2x-4}\cdot(2),\ f'(2)=2.$$

(c) Odvajamo kot produkt.

$$f'(x)=1\sqrt{x^2+9}+x\tfrac{1}{2}(x^2+9)^{-\frac{1}{2}}2x,\ f'(4)=\tfrac{41}{5}.$$

(d) Odvajamo kot kvocient.

$$f'(x)=\tfrac{2e^{2x}(1+e^{4x})-(e^{2x})(4e^{4x})}{(1+e^{4x})^2},\ f'(-1)=-\tfrac{2e^{-2}(e^{-4}-1)}{(e^{-4}+1)^2}.$$

(e) Odvajamo kot sestavljeno funkcijo.

$$f'(x)=\tfrac{1}{\cos^2(2x^2)}4x,\ f'(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}})=4\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}.$$

(f) Odvajamo kot kvocient.

$f'(x) = \frac{(\sin x \cdot \cos^2 x)'(1+\cos^2 x) - (\sin x \cdot \cos^2 x)(1+\cos^2 x)'}{(1+\cos^2 x)^2} =$
$\frac{(\cos x \cos^2 x + \sin x (2\cos x(-\sin x)))(1+\cos^2 x) - (\sin x \cdot \cos^2 x)(2\cos x(-\sin x)}{(1+\cos^2 x)^2}$
$f'(\frac{\pi}{2}) = 0.$

(g) Funkcijo preoblikujemo.
$\frac{1}{x \cdot \ln x} = (x \cdot \ln x)^{-1}.$
Odvajamo kot sestavljeno funkcijo.
$f'(x) = -1(x \cdot \ln x)^{-2}(x \cdot \ln x)' = -(x \cdot \ln x)^{-2}(\ln x + x\frac{1}{x}) =$
$-(x \cdot \ln x)^{-2}(\ln x + 1),\ f'(e) = -\frac{2}{e^2}.$

(h) Odvajamo kot produkt.

$f'(x) = 1e^{2x^2+3} + x(e^{2x^2+3}(4x)),\ f'(1) = 5e^5.$

(i) Odvajamo kot kvocient.

$f'(x) = \frac{(\ln^3 x)'(4x) - (\ln^3 x)(4x)'}{(4x)^2} = \frac{(3\ln^2 x(\frac{1}{x}))(4x) - (\ln^3 x)(4)}{(4x)^2},\ f'(1) = 0.$

3. Zapišite prvi in drugi odvod funkcije.

(a) $\sqrt{1+2x^3}$

(b) $\ln(x^2+2)$

(c) $e^{-x}\cos x$

(d) $x^2(2\ln x - 3)$

Rešitev.

(a) $y = \sqrt{1+2x^3}, \quad y' = \frac{1}{2}(1+2x^3)^{-\frac{1}{2}}(6x^2) = (3x^2)\cdot(1+2x^3)^{-\frac{1}{2}}$
$y'' = 6x(1+2x^3)^{-\frac{1}{2}} - 9x^4(1+2x^3)^{-\frac{3}{2}}.$

(b) $y = \ln(x^2+2), \quad y' = \frac{1}{(x^2+2)}(2x), \quad y'' = \frac{2(x^2+2)-2x(2x)}{(x^2+2)^2} = \frac{-2x^2+4}{(x^2+2)^2}.$

(c) $y = e^{-x}\cos x, \quad y' = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x = -e^{-x}(\cos x + \sin x),$
$y'' = 2e^{-x}\sin x.$

(d) $y = x^2(2\ln x - 3), \quad y' = 2x(2\ln x - 3) + x^2\frac{2}{x} = 4x(\ln x - 1),$
$y'' = 4(\ln x - 1) + 4x(\frac{1}{x}) = 4\ln x.$

4. Implicitno odvajajte funkcijo.

(a) $3x^2 - 2y^2 = 100$

(b) $12x^3 + 3x^2y + y^3 = 120$

(c) $y^3 + y - x^2 + 4x + xy - 12 = 0$

Rešitev.
Pri implicitno podani funkciji upoštevamo, da je y funkcija spremeljivke x $\;(y = y(x))$ in jo je zato treba odvajati kot posredno funkcijo.

(a) $6x - 4yy' = 0, \quad y' = \frac{6x}{4y}.$

(b) $36x^2 + 3(2xy + x^2 1y') + 3y^2y' = 0, \quad y' = -\frac{36x^2+6xy}{3x^2+3y^2}.$

(c) $3y^2y' + 1y' - 2x + 4 + y + xy' = 0, \quad y' = \frac{2x-4-y}{3y^2+1+x}.$

5. Naj bo $y = \sin(-x) + 2e^{2x}$. Izračunajte $y''' - 6y'' + 11y' - 6y$.

Rešitev.

- Potrebujemo prvi, drugi in tretji odvod funkcije $y(x)$.
- $y' = -\cos(-x) + 4e^{2x}.$
- $y'' = -\sin(-x) + 8e^{2x}.$
- $y''' = \cos(-x) + 16e^{2x}.$
- $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = \cos(-x) + 16e^{2x} - 6(-\sin(-x) + 8e^{2x}) + 11(-\cos(-x) + 4e^{2x}) - 6(\sin(-x) + 2e^{2x}) = -10\cos(-x).$

6. Naj bo $y(t) = A\cos(wt) + B\sin(wt)$ $(A, B, w$ so konstante). Dokažite, da je $y'' + w^2 y = 0$.

Rešitev.

- Potrebujemo prvi in drugi odvod funkcije $y(t)$.
- $y'(t) = -A\sin(wt)(w) + B\cos(wt)(w) = -Aw\sin(wt) + Bw\cos(wt)$.
- $y''(t) = -Aw^2\cos(wt) - Bw^2\sin(wt)$.
- $y'' + w^2 y = -Aw^2\cos(wt) - Bw^2\sin(wt) + w^2 \cdot (A\cos(wt) + B\sin(wt)) = 0$.

7. Zapišite enačbo tangente na krivuljo $y = x^2 + x$ v točki $T(2, 6)$.

Rešitev.

- Smerni koeficient tangente na graf funkcije v točki T je enak odvodu funkije v tej točki. $(f'(x_0) = k_t)$
- Enačba tangente je enaka $(y - y_0) = k_t \cdot (x - x_0)$.
- $f'(x) = 2x + 1, f'(2) = 5$.
- Zapišimo sedaj enačbo tangente v točki $T(2, 6)$.
  $(y - 6) = 5 \cdot (x - 2)$ ali $y = 5x - 4$.

8. Zapišite enačbo tangente na graf funkcije $f(x) = \frac{x}{x^3+4}$ v točki $T(-2, y)$.

Rešitev.

- $y = f(x) = f(-2) = \frac{1}{2}$.
- $f'(x) = \frac{-2x^3+4}{(x^3+4)^2}, f'(-2) = \frac{5}{4}$.
- Zapišimo enačbo tangente v točki $T(-2, \frac{1}{2})$.
  $(y - \frac{1}{2}) = \frac{5}{4} \cdot (x - (-2))$ ali $y = \frac{5}{4}x + 3$.

9. Zapišite enačbo normale na krivuljo $y = x^2 + 2x - 8$ v točki z absciso 4.

Rešitev.

- Abscisna os je x-os, zato je $x = 4, y = 16$.
- $f'(x) = 2x + 2, f'(4) = 10$.
- Normala je pravokotna na tangento.
  Smerni koeficient normale v točki T je enak $k_n = -\frac{1}{k_t}, k_n = -\frac{1}{10}$.
- Zapišimo enačbo normale na graf funkcije v točki $T(4, 16)$.
  $(y - 16) = -\frac{1}{10} \cdot (x - 4))$ ali $y = -\frac{1}{10}x + \frac{82}{5}$.

10. Zapišite enačbo normale na graf funkcije $f(x) = \frac{2-x}{2+x}$ v točki z ordinato 2.

Rešitev.

- Ordinatna os je y-os, zato je $x = -\frac{2}{3}, y = 2$.
- $f'(x) = \frac{-1(2+x)-(2-x)(1)}{(2+x)^2} = \frac{-4}{(2+x)^2}, f'(-\frac{2}{3}) = -\frac{9}{4}$.
- Zapišimo enačbo normale na graf v točki $T(-\frac{2}{3}, 2)$.
  $(y - 2) = -\frac{9}{4} \cdot (x + \frac{2}{3})), y = -\frac{9}{4}x + \frac{1}{2}$.

11. Zapišite enačbo tangente in normale na graf funkcije $f(x) = \tan(x)$ v točki $T(\frac{\pi}{4}, y)$.

Rešitev.

- $y = f(x) = \tan(x), f(\frac{\pi}{4}) = 1, T(\frac{\pi}{4}, 1)$.
- $f'(x) = \frac{1}{(\cos^2 x)}, f'(\frac{\pi}{4}) = 2$.
- Enačba tangente je enaka: $(y - 1) = 2 \cdot (x - \frac{\pi}{4})$ ali $y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$.

12. Izračunajte v kateri točki krivulje $y = x^2 - x - 2$ je tangenta vzporedna premici $y = 2x - 6$.

Rešitev.

- Vzporedne premice imajo isti smerni koeficient.
- Koeficient dane premice je 2, torej je tudi smerni koeficient iskane tangente ($f'(x_0) = 2$).
- Iščemo točko x_0, ki ustreza $f'(x_0) = 2$.
- Rešitev enačbe $f'(x_0) = 2x - 1 = 2$ je $x_0 = \frac{3}{2}$.
- Iskana točka ima koordinate $x_0 = \frac{3}{2}, y_0 = -\frac{5}{4}$.

13. Za kateri a je normala na graf funkcije $f(x) = ax^3$ v točki z absciso $x = 3$ vzporedna premici $x - 9y - 81 = 0$?

Rešitev.

- Vzporedne premice imajo isti smerni koeficient.
- Premico preoblikujemo: $y = \frac{1}{9}x - 9$.
- Koeficient dane premice je $\frac{1}{9}$, torej je tudi smerni koeficient normale enak $\frac{1}{9}$.
- Smerni koeficient tangent je tako enak ($f'(x_0) = -9$).
- Iščemo vrednost a, kjer je rešitev enačbe $f'(3) = a3^3 = -9$.
- Rešitev je $a = -\frac{1}{3}$.
- Iskana funkcije je $f(x) = -\frac{1}{3}x^3$.

14. Na grafu funkcije $f(x) = 2x^3 - 6x$ določite točke, v katerih je tangenta vzporedna z abscisno osjo.

Rešitev.

- Smerni koeficient abscisne osi je enak 0, torej je tudi smerni koeficient tangente, ki je vzporedna abscisni osi, enak 0.
- Iščemo točke x_0, ki ustrezajo enačbi $f'(x_0) = 0$.
- Rešitev enačbe $f'(x) = 6x^2 - 6 = 0$ je $x_0 = \pm 1$.
- Prva iskana točka ima koordinate $T_1 = (1, -4)$, druga pa $T_2 = (-1, 4)$.

15. Izračunaj kot med krivuljama $y_1 = \frac{1}{x^2}$ in $y_2 = \frac{x^2+1}{2}$.

Rešitev.

- Kot med krivuljama je kot med pripadajočima tangentama v presečišču krivulj.
- Uporabimo naslednjo formulo $\tan\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$.
- Poiščimo presečišče krivulj.
  $\frac{1}{x^2} = \frac{x^2+1}{2}$, $\quad 0 = x^4 + x^2 - 2$, $\quad 0 = (x^2 - 1)(x^2 + 2)$.
- Ker smo v množici realnih števil je veljavna rešitev: $(x^2 - 1) = 0$, od koder sledi $(x-1)(x+1) = 0$.
- Krivulji se sekata v točkah $x_1 = 1, x_2 = -1$.

- Izračunajmo najprej kot med krivuljama v točki $x_1 = 1$.
- Smerni koeficient tangente na prvo krivuljo je enak $f'(1) = -2$, smerni koeficient tangente na drugo pa $f'(1) = 1$.
- Kot med krivuljama je $\tan\varphi = \frac{-2-1}{1+(-2)(1)} = 3$, $\varphi = 71,56°$.

- Izračunajmo še kot med krivuljama v točki $x_1 = -1$.
- Smerni koeficient tangente na prvo krivuljo je enak $f'(-1) = -2 \cdot \frac{1}{(-1)^3} = 2$, smerni koeficient tangente na drugo pa $f'(-1) = -1$.
- Kot med krivuljama je $tg\varphi = \frac{2+1}{1+(2)(-1)} = -3$, $\varphi = 108,44°$.

16. Izračunajte, pod kolikšnim kotom seka graf funkcije $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$ abscisno os?

Rešitev.

- Poiskati moramo točke, v katerih graf funkcije seka abscisno os.
- $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4} = 0,\ \ x^2-4 = 0,\ \ (x-2)(x+2) = 0,\ \ x_1 = 2,\ \ x_2 = -2.$
- $f'(x) = \frac{16x}{(x^2+4)^2}$. Smerni koeficient tangente v točki x_1 je enak $f'(2) = \frac{1}{2}$, v točki x_2 pa $f'(-2) = -\frac{1}{2}$.
- Kot med prvo tangento in abscisno osjo je enak:
  $\tan\varphi = \frac{\frac{1}{2}-0}{1+\frac{1}{2}\cdot 0} = \frac{1}{2}, \varphi = 26,56°.$
- Kot med drugo tangento in abscisno osjo pa:
  $\tan\varphi = \frac{-\frac{1}{2}-0}{1+(-\frac{1}{2})\cdot 0} = -\frac{1}{2}, \varphi = 153,43°.$

17. Kolikšen je naklonski kot tangente na graf funkcije $f(x) = e^{2x}$ v presečišču z ordinatno osjo?

Rešitev.

- Smerni koeficient tangente je enak $f'(0) = 2$.
- Naklonski kot tangente je enak: $\tan\varphi = \frac{2-0}{1+2\cdot 0} = 2, \varphi = 63,63°.$

18. V katerih točkah krivulje $y = x^3 - 13x$ ima normala naklonski kot $45°$?

Rešitev.

- Naklonski kot normale je enak $45°$, torej je naklonski kot tangente enak $180° - 45° = 135°$.
- Uporabimo sedaj formulo $\tan\varphi = \frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}$.
  $\tan 135° = -1, -1 = k_1, 0 = k_2$. Smerni koeficient tangente je -1.
- Rešitev enačbe $f'(x) = 3x^2 - 3 = -1$ je $x_0 = \pm 2$.
- $T_1(2,-14)$ in $T_2(-2,14)$ sta točki v katerih ima normala na krivuljo naklonski kot $45°$.

19. Z uporabo L'Hospitalovega pravila izračunajte limite:

(a) $\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+12}-4}{\sqrt{x-4}}$

(b) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(\sin 4x)}{\ln(\sin 2x)}$

(c) $\lim_{x\to0}\frac{(1-e^x)x^3}{\sin x}$

(d) $\lim_{x\to\infty}(x+3x^2)e^{-2x}$

(e) $\lim_{x\to0}x^2\ln x$

Rešitev.

(a) Če v ulomek vstavimo $x=4$, dobimo nedoločen izraz $\frac{0}{0}$.
Uporabimo sedaj L'Hospitalovo pravilo.
$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x+12}-4}{\sqrt{x-4}}=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x+12}-4)'}{(\sqrt{x-4})'}$
$\lim_{x\to4}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+12}}}{\frac{1}{2\sqrt{x-4}}}=\lim_{x\to4}\frac{2\sqrt{x-4}}{2\sqrt{x+12}}=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+12}}=\frac{0}{4}=0.$

(b) Ulomek je oblike $\frac{-\infty}{-\infty}$.
$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\sin 4x)}{\ln(\sin 2x)}=\lim_{x\to0}\frac{(\ln(\sin 4x))'}{(\ln(\sin 2x))'}=\lim_{x\to0}\frac{2\cos 4x}{\cos 2x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 4x}.$
Drugi člen odvajamo in dobimo: $2\cdot\lim_{x\to0}\frac{2\cos 2x}{4\cos 4x}=2\cdot\frac{2}{4}=1.$

(c) Ulomek je oblike $\frac{0}{0}$.
$\lim_{x\to0}\frac{(1-e^x)x^3}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{-x^3e^x+3x^2-3x^2e^x}{\cos x}=0.$

(d) Ulomek je oblike $\frac{\infty}{\infty}$.
$\lim_{x\to\infty}(x+3x^2)e^{-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+3x^2}{e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+6x}{2e^{2x}}$
$\lim_{x\to\infty}\frac{(1+6x)'}{(2e^{2x})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{4e^{2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{2e^{2x}}=0.$

(e) $\lim_{x\to0}-x^2\ln x$
$\lim_{x\to0}-x^2\ln x=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{-x^{-2}}=\lim_{x\to0}\frac{x^{-1}}{2x^{-3}}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2}=0.$

20. Z uporabo diferenciala ustrezne funkcije približno izračunajte vrednosti.

   (a) $\cos 50^0$
   (b) $\sqrt{30}$
   (c) $\ln 0,75$

   Rešitev.
   Vrednost funkcije blizu kakšne lepe točke a ocenimo z vrednostjo na tangenti funkcije skozi točko $(a, f(a))$; to je z uporabo formule $f(a+h) = f(a) + f'(a)h$.

   (a)
   - $f(x) = \cos x, a = \frac{\pi}{4}, h = \frac{\pi}{36}$.
   - $f'(x) = -\sin x, f(\frac{\pi}{4}) = 0,707, f'(\frac{\pi}{4}) = -0,707$.
   - $f(a+h) = f(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{36}) = f(50°) \approx 0,707 + (-0,707)\frac{\pi}{36} = 0,64$.

   (b)
   - $f(x) = \sqrt{x}, a = 36, h = -6$.
   - $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, f(36) = 6, f'(36) = \frac{1}{12}$.
   - $f(30) \approx 6 + \frac{1}{12}(-6) = \frac{11}{2}$.

   (c)
   - $f(x) = \ln x, a = 1, h = -0,25$.
   - $f'(x) = \frac{1}{x}, f(1) = 0, f'(1) = 1$.
   - $f(0,75) \approx 0 + 1 \cdot (-0,25) = -0,25$.

21. Zapišite Tayloryev polinom tretje stopnje za funkcijo f v okolici dane točke.

   (a) $(2x^2 + 3x - 4)e^{2x}, a = 0$
   (b) $\sin x, a = \frac{\pi}{2}$
   (c) $\ln(2x^2 - 1), a = 1$

   Rešitev.
   Tayloryev polinom n-te stopnje za funkcijo f v okolici dane točke a:
   $T_f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

(a)
- $f'(x) = (4x^2 + 10x - 5)e^{2x}, f''(x) = (8x^2 + 28x)e^{2x}, f'''(x) = (16x^2 + 72x + 28)e^{2x}$
- $f(0) = -4, f'(0) = -5, f''(0) = 0, f'''(0) = 28$
- $T_f(x) = -4 + \frac{-5}{1!}(x) + \frac{0}{2!}(x)^2 + \frac{28}{3!}(x)^3$
- $T_f(x) = -4 - 5x + \frac{14}{3}(x)^3.$

(b)
- $f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x$
- $f(\frac{\pi}{2}) = 1, f'(\frac{\pi}{2}) = 0, f''(\frac{\pi}{2}) = -1, f'''(\frac{\pi}{2}) = 0$
- $T_f(x) = 1 + \frac{0}{1!}(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{-1}{2!}(x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{0}{3!}(x - \frac{\pi}{2})^3$
- $T_f(x) = 1 - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2.$

(c)
- $f'(x) = \frac{4x}{2x^2-1}, f''(x) = \frac{-8x^2-4}{(2x^2-1)^2}, f'''(x) = \frac{64x^5+64x^3-48x}{(2x^2-1)^4}$
- $f(1) = 0, f'(1) = 4, f''(1) = -12, f'''(1) = 80$
- $T_f(x) = \frac{4}{1!}(x - 1) + \frac{-12}{2!}(x - 1)^2 + \frac{80}{3!}(x - 1)^3$
- $T_f(x) = 4(x - 1) - 6(x - 1)^2 + \frac{40}{3}(x - 1)^3.$

1.2 Analiza funkcij

1. Poiščite in klasificirajte stacionarne točke funkcij:

   (a) $f(x) = \frac{2x^2-3x-2}{x^2+1}$

   (b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

   (c) $f(x) = 3e^x - e^{3x}$

   (d) $f(x) = 2\cos x + \cos 2x$

   (e) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

   (f) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

   Rešitev.

   Stacionarne točke funkcije f so rešitve enačbe $f'(x) = 0$. V stacionarni točki x_0 je lokalni maksimum, če je $f''(x_0) < 0$ in lokalni minimum, če je $f''(x_0) > 0$.

(a)
- $f'(x) = \frac{3x^2+8x-3}{(x^2+1)^2}, f''(x) = \frac{-6x^5-24x^4+12x^3-16x^2+18x+8}{(x^2+1)^4}$.
- Stacionarni točki: $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -3$.
- $f''(\frac{1}{3}) > 0$, v točki x_1 je lokalni minimum.
- $f''(-3) < 0$, v točki x_2 je lokalni maksimum.

(b)
- $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x, f''(x) = 12x^2 - 24x + 8$.
- Stacionarni točki: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$.
- $f''(0) = 8 > 0$, v točki x_1 je lokalni minimum.
- $f''(1) = -4 < 0$, v točki x_2 je lokalni maksimum.
- $f''(2) = 8 > 0$, v točki x_3 je lokalni minimum.

(c)
- $f'(x) = 3e^x - 3e^{3x}, f''(x) = 3e^x - 9e^{3x}$.
- Stacionarna točka: $x_1 = 0$.
- $f''(0) = -6 < 0$, v točki x_1 je lokalni maksimum.

(d)
- $f'(x) = -2\sin x - 2\sin 2x, f''(x) = -2\cos x - 4\cos 2x$.
- Stacionarna točka: $x_1 = 0$.
- $f''(0) = -6 < 0$, v točki x_1 je lokalni maksimum.

(e)
- $f'(x) = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}, f''(x) = \frac{-12x+2x^3}{(\sqrt{4-x^2})\cdot(4-x^2)}$
- Stacionarni točki: $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$.
- $f''(\sqrt{2}) = -4 < 0$, v točki x_1 je lokalni maksimum.
- $f''(-\sqrt{2}) = 4 > 0$, v točki x_2 je lokalni minimum.

(f)
- $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}, f''(x) = \frac{2-\ln x}{x\ln^3 x}$.
- Stacionarna točka: $x_1 = e$.
- $f''(e) = \frac{1}{e} < 0$, v točki x_1 je lokalni maksimum.

2. Poiščite stacionarne točke, prevoje ter območja konveksnosti in konkavnosti funkcije.

   (a) $f(x) = x(x-2)^3$
   (b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4x+4}$
   (c) $f(x) = x \ln x$
   (d) $f(x) = x + \cos x$

Rešitev.
Funkcija f je konveksna, kjer je $f''(x) > 0$ in konkavna, kjer je $f''(x) < 0$. Prevoji so rešitve enačbe $f''(x) = 0$.

(a)
- $f'(x) = (x-2)^2(4x-2), f''(x) = 12x^2 - 36x + 24$.
- Stacionarni točki: $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$.
- $f''(2) = 0$ ni ekstrema; $f''(\frac{1}{2}) = 9$ lokalni minimum.
- Prevoji: $f''(x) = 12x^2 - 36x + 24 = 0, x_3 = 2, x_4 = 1$.
- Konveksna: $f''(x) > 0, \quad 12x^2 - 36x + 24 > 0, (x-2)(x-1) > 0$
  $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ interval konveksnosti.
- Konkavna: $f''(x) < 0, \quad 12x^2 - 36x + 24 < 0, (x-2)(x-1) < 0$
  $(1, 2)$ interval konkavnosti.

(b)
- $f'(x) = \frac{-4x^2+10x-4}{(x^2-4x+4)^2}, f''(x) = \frac{8x^3-30x^2+24x+8}{(x^2-4x+4)^3}$.
- Stacionarni točki: $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$.
  Funkcija v $x_1 = 2$ ni definirana!
- $f''(\frac{1}{2}) = \frac{32}{27}$ lokalni minimum.
- Prevoji: $f''(x) = 8x^3 - 30x^2 + 24x + 8 = 0, x_3 = 2, x_4 = -\frac{1}{4}$.
- Konveksna: $f''(x) > 0, \quad 8x^3 - 30x^2 + 24x + 8 > 0$,
  $2(x-2)^2(4x+1) > 0 : (-\frac{1}{4}, 2)$ interval konveksnosti.
- Konkavna: $f''(x) < 0 : (-\infty, -\frac{1}{4}) \cup (2, \infty)$ interval konkavnosti.

(c)
- $f'(x) = \ln x + 1, f''(x) = \frac{1}{x}$.
- Stacionarna točka: $x_1 = \frac{1}{e}$, lokalni minimum.
- Prevoji: $f''(x) = \frac{1}{x} = 0$. Prevojev ni!
  Funkcija je definirana na intervalu $(0, \infty)$.

- Konveksna: $f''(x) > 0, \quad \frac{1}{x} > 0,$
  $(0, \infty)$ interval konveksnosti.

(d)
- $f'(x) = 1 - \sin x, f''(x) = -\cos x$.
- Stacionarne točke: $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.
- $f''(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = 0$, ni lokalnega ekstrema.
- Prevoji: $f''(x) = -\cos x = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- Konveksna: $f''(x) > 0, -\cos x > 0:$
  $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$ interval konveksnosti.
- Konkavna: $f''(x) < 0: \quad -\cos x < 0:$
  $(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad \frac{5\pi}{2} + 2k\pi)$ interval konkavnosti.

3. Za vsako od danih funkcij določite:

- Definicijski območje, obnašanje funkcije na robu definicijskega območja,
- ničle,
- ekstreme, intervale naraščanja in padanja,
- prevoje, intervale konveksnosti in konkavnosti.

(a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-9}$
(b) $f(x) = \frac{6x-6}{x^2+3}$
(c) $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$
(d) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$
(e) $f(x) = 3e^x - e^{3x}$
(f) $f(x) = 3\cos 2x$
(g) $f(x) = e^{2x-x^2}$
(h) $f(x) = x\sqrt{8-x^2}$
(i) $f(x) = x^3 \ln x$

Rešitev.

(a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-9}$
- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$.

- $f(x) = 0; x^2 = 0, x_{1,2} = 0$ so ničle funkcije.
- $f'(x) = \frac{-18x}{(x^2-9)^2}, f''(x) = \frac{54x^2+162}{(x^2-9)^3}$
  $f'(x) = 0; x_3 = 0$ stacionarna točka.
  $f''(0) < 0$ lokalni maksimum.
- Funkcija narašča na intervalu $(-\infty, 0)$
  ter pada na intervalu $(0, \infty)$.
- $f''(x) = 0; 54x^2 + 162 = 0$, Prevojev ni!
- $f''(x) > 0; \frac{54x^2+162}{(x^2-9)^3} > 0$
  $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$interval konveksnosti.
- $f''(x) < 0; \frac{54x^2+162}{(x^2-9)^3} < 0$
  $(-3, 3)$interval konkavnosti.

(b) $f(x) = \frac{6x-6}{x^2+3}$

- $D_f = \mathbb{R}$.
- $f(x) = 0; 6x - 6 = 0, x_1 = 1$ je ničla funkcije.
- $f'(x) = \frac{6(x^2-2x-3)}{(x^2+3)^2}, f''(x) = \frac{12(x^3-3x^2-9x+3)}{(x^2+3)^3}$
  $f'(x) = 0; x_2 = 3, x_3 = -1$ stacionarni točki. $f''(3) < 0$ lokalni maksimum. $f''(-1) > 0$ lokalni minimum.

- $f''(x) = 0; \frac{12(x^3-3x^2-9x+3)}{(x^2+3)^3} = 0,$
  $x_4 = -2,06, x_5 = 0,30, x_6 = 4,75$ prevoji.
- $f''(x) < 0; \quad (-\infty, -2.06) \cup (0.3, 4.75)$interval konkavnosti.
- $f''(x) > 0; \quad (-2.06, 0.3) \cup (4.75, \infty)$interval konveksnosti.

(c) $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$

- $D_f = \mathbb{R}$.
- $f(x) = 0; \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2 = 0,$
  $x_{1,2} = 0, x_3 = \frac{2}{3}(-1 - \sqrt{10}), x_4 = \frac{2}{3}(-1 + \sqrt{10})$ ničle.
- $f'(x) = x(x^2 + x - 2), f''(x) = 3x^2 + 2x - 2.$
  $f'(x) = 0; x_5 = 0, x_6 = -2, x_7 = 1$ stacionarne točke.
  $f''(0) < 0$ maksimum. $f''(-2) > 0$ minimum. $f''(1) > 0$ minimum.
- $f''(x) = 0; 3x^2 + 2x - 2 = 0,$
  $x_8 = \frac{1}{3}(-1 + \sqrt{7}), x_9 = \frac{1}{3}(-1 - \sqrt{7})$ prevoja.
  $f''(x) < 0; (-1.2, 0.6)$interval konkavnosti.
  $f''(x) > 0; (-\infty, -1.2) \cup (0.6, \infty)$interval konveksnosti.

(d) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$

- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$.
- $f(x) = 0; \frac{x^3}{x^2-4} = 0, x_{1,2,3} = 0$ ničle.
- $f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}, f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$.
  $f'(x) = 0; x_4 = -2\sqrt{3}, x_5 = 2\sqrt{3}, x_{6,7} = 0$ stacionarne točke.
  $f''(-2\sqrt{3}) < 0$ maksimum.
  $f''(2\sqrt{3}) > 0$ minimum.
- $f''(x) = 0 : 8x(x^2+12) = 0, x_6 = 0$ prevoj.
  $f''(x) < 0; (-\infty, 0)$interval konkavnosti.
  $f''(x) > 0; (0, \infty)$interval konveksnosti.

(e) $f(x) = 3e^x - e^{3x}$

- $D_f = \mathbb{R}$.
- $f(x) = 0; 3e^x - e^{3x} = 0, x_1 = \frac{\ln 3}{2}$ ničla.
- $f'(x) = -3e^x(e^{2x}-1), f''(x) = 3e^x - 9e^{3x}$.
  $f'(x) = 0; x_2 = 0$ stacionarna točka.
  $f''(0) < 0$ maksimum.
- $f''(x) = 0; 3e^x - 9e^{3x} = 0, x_6 = -\frac{\ln\frac{1}{3}}{2}$ prevoj.
  $f''(x) < 0; (-\frac{\ln\frac{1}{3}}{2}, \infty)$interval konkavnosti.
  $f''(x) > 0; (-\infty, -\frac{\ln\frac{1}{3}}{2})$interval konveksnosti.

(f) $f(x) = 3\cos 2x$

- $D_f = \mathbb{R}$.
- $f(x) = 0; 3\cos 2x = 0, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$ ničle.
- $f'(x) = -6\sin 2x, f''(x) = -12\cos 2x$.
  $f'(x) = 0; -6\sin 2x = 0, \quad x = \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$ stacionarne točke.
  $f''(0) < 0, \quad x_{max} = k\pi$ maksimum.
  $f''(0) > 0, \quad x_{min} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ minimum.
- $f''(x) = 0; \quad -12\cos 2x = 0, x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$ prevoj
  $f''(x) < 0; (-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$interval konkavnosti.
  $f''(x) > 0; (\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi)$interval konveksnosti.

(g) $f(x) = e^{2x-x^2}$

- $D_f = \mathbb{R}$.
- $f(x) = 0; e^{2x-x^2}$ ničle ni!

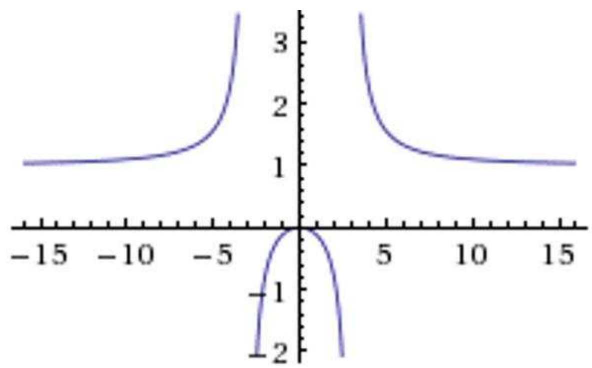
- $f'(x) = -2e^{-(x-2)x}(x-1), f''(x) = e^{-(x-2)x}(4x^2 - 8x + 2)$
  $f'(x) = 0; x_1 = 1$ stacionarna točka.
  $f''(0) < 0$ maksimum.
- $f''(x) = 0; e^{-(x-2)x}(4x^2 - 8x + 2) = 0,$
  $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, x_3 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ prevoj.
  $f''(x) < 0; (1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$interval konkavnosti.
  $f''(x) > 0; (-\infty, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$interval konveksnosti.

(h) $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

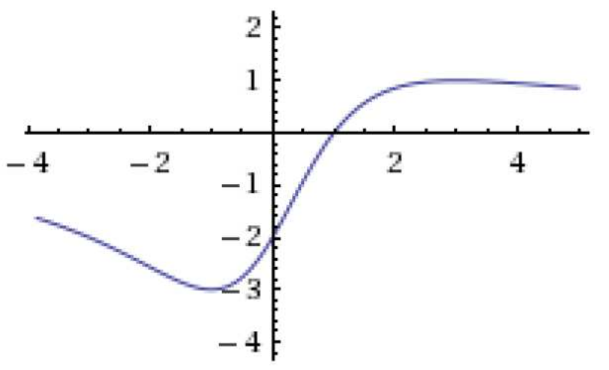
- $D_f = \left[-\sqrt{8}, \sqrt{8}\right].$
- $f(x) = 0; x\sqrt{8 - x^2} = 0, \quad x_1 = 0, x_2 = -2\sqrt{2}, x_3 = 2\sqrt{2}$ ničle.
- $f'(x) = -\frac{2(x^2-4)}{\sqrt{8-x^2}}, f''(x) = \frac{2x(x^2-12)}{(8-x^2)^{\frac{3}{2}}}$
  $f'(x) = 0; -\frac{2(x^2-4)}{\sqrt{8-x^2}} = 0, \quad x_4 = 2, x_5 = -2$ stacionarni točki.
  $f''(2) < 0$ maksimum. $f''(-2) > 0$ minimum.
- $f''(x) = 0; \frac{2x(x^2-12)}{(8-x^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$
  $x_6 = 0, x_7 = \sqrt{12}, x_8 = -\sqrt{12}$ prevoji.
  $f''(x) < 0; (0, \sqrt{8})$interval konkavnosti.
  $f''(x) > 0; (-\sqrt{8}, 0)$interval konveksnosti.

(i) $f(x) = x^3 \ln x$

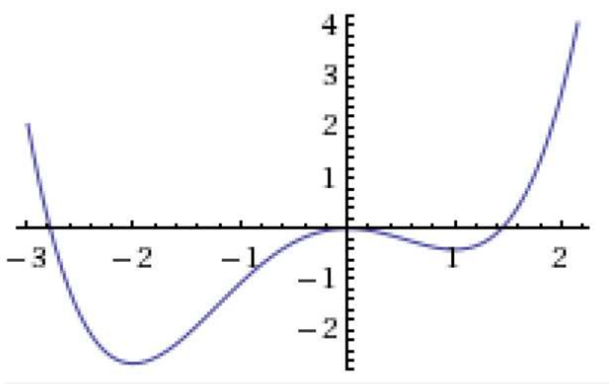
- $D_f = \mathbb{R} > 0$
- $f(x) = 0; x^3 \ln x = 0, \quad x_1 = 1$ je ničla funkcije.
- $f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2, f''(x) = 6x \ln x + 5x$
  $f'(x) = 0; \quad x_2 = e^{-\frac{1}{3}}$ stacionarna točka.
  $f''(e^{-\frac{1}{3}}) < 0$ lokalni maksimum.
- Funkcija pada na intervalu $(0, e^{-\frac{1}{3}})$
  ter narašča na intervalu $(e^{-\frac{1}{3}}, \infty)$.
- $f''(x) = 0; 6x \ln x + 5x = 0, \quad x_3 = e^{-\frac{5}{6}}$ je prevoj!
- $f''(x) > 0; 6x \ln x + 5x > 0$
  $(e^{-\frac{5}{6}}, \infty)$interval konveksnosti.
- $f''(x) < 0; 6x \ln x + 5x < 0$
  $(0, e^{-\frac{5}{6}})$interval konkavnosti.



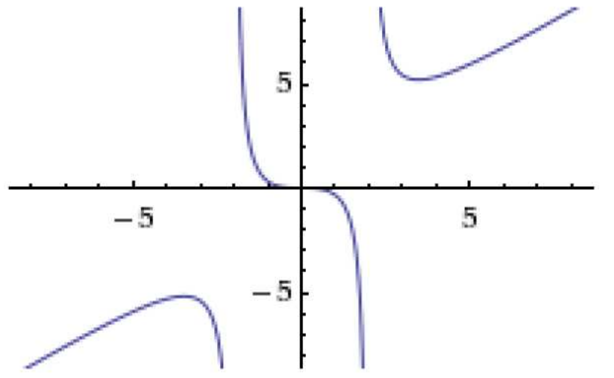
Slika 1.1: $f(x) = \frac{x^2}{x^2-9}$



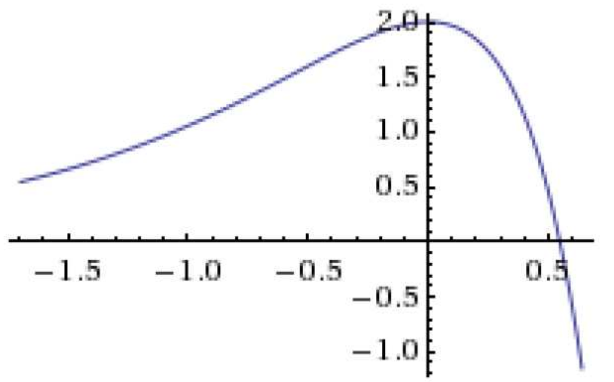
Slika 1.2: $f(x) = \frac{6x-6}{x^2+3}$



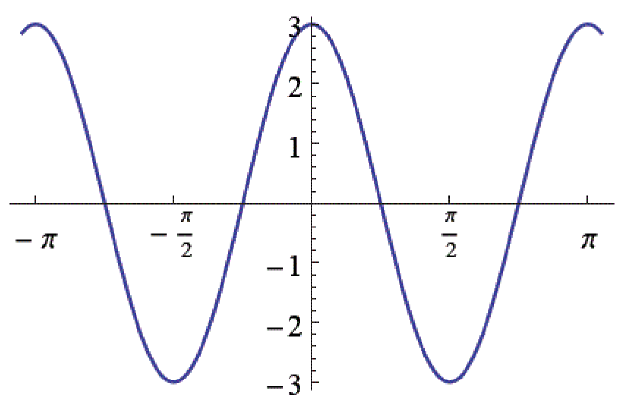
Slika 1.3: $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$



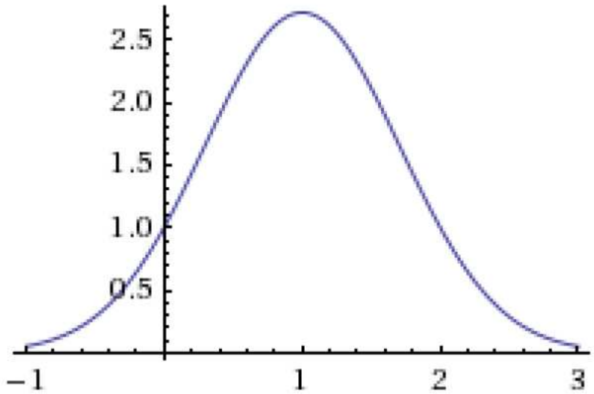
Slika 1.4: $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$



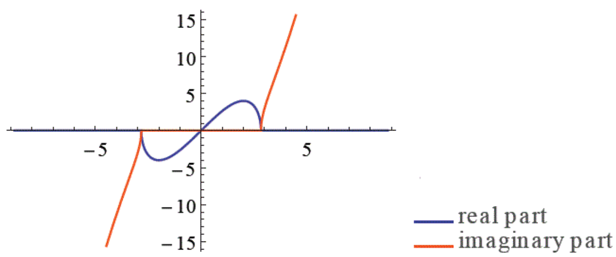
Slika 1.5: $f(x) = 3e^x - e^{3x}$



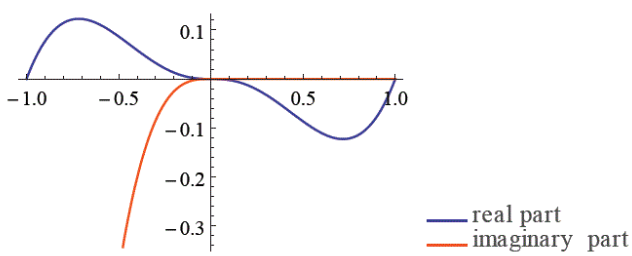
Slika 1.6: $f(x) = 3\cos 2x$



Slika 1.7: $f(x) = e^{2x-x^2}$



Slika 1.8: $f(x) = x\sqrt{8-x^2}$



Slika 1.9: $f(x) = x^3 \ln x$

1.3 Optimizacijske naloge

1. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije f na danem intervalu:

   (a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-4x^2+4}, [-2, 3]$

   (b) $f(x) = x^2 \ln x, [2, 6]$

   (c) $f(x) = x + \cos x, [0, \pi]$

   (d) $f(x) = e^{2x-x^2}, [-3, 2]$

   (e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}, [5, 10]$

Rešitev.

Odvedljiva funkcija na danem (zaprtem) intervalu doseže največjo in najmanjšo vrednost bodisi znotraj intervala v stacionarni točki bodisi v krajiščih intervala. Postopek iskanja največje in najmanjše vrednosti:

- Poiščemo stacionarne točke znotraj intervala.
- Izračunamo funkcijske vrednosti v teh stacionarnih točkah.
- Izračunamo funkcijski vrednosti v krajiščih intervala.
- Med izračunanimi funkcijskimi vrednostmi izberemo največjo (f_{max}) in najmanjšo (f_{min}).

(a)
- $f'(x) = \frac{-x^4+3x^2}{(x^3-4x^2+4)^2}$.
- Stacionarna točka: $-x^4 + 3x^2 = 0, x_1 = 0$.
- $f(0) = -\frac{1}{4}, f(-2) = -\frac{3}{20}, f(3) = -\frac{8}{5}$.
- $f_{max} = f(-2) = -\frac{3}{20}, f_{min} = f(3) = -\frac{8}{5}$.

(b)
- $f'(x) = x(2 \ln x + 1)$.
- Stacionarna točka: $x(2 \ln x + 1) = 0, x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{\sqrt{e}}$.
- $f(0) = 0, f(\frac{1}{\sqrt{e}}) = -\frac{1}{2e}, f(2) = 2,76, f(6) = 64,50$.
- $f_{max} = f(6) = 64,50, f_{min} = f(\frac{1}{\sqrt{e}}) = -\frac{1}{2e}$.

(c)
- $f'(x) = 1 - \sin x$.
- Stacionarna točka: $1 - \sin x = 0, x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
- $f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, f(0) = 1, f(\pi) = \pi - 1$.
- f_{max} ne obstaja, $f_{min} = f(0) = 1$.

(d)
- $f'(x) = e^{2x-x^2}(2 - 2x)$.
- Stacionarna točka: $e^{2x-x^2}(2 - 2x) = 0, x_1 = 1$.
- $f(1) = e, f(-3) = e^{-15}, f(2) = 1$.
- $f_{max} = f(1) = e, f_{min} = f(-3) = e^{-15}$.

(e)
- $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.
- Stacionarna točka: $x = 0$, vendar funkcija ni definirana v tej točki, zato nimamo stacionarnih točk.
- $f(5) = \sqrt{24}, f(10) = \sqrt{99}$.
- $f_{max} = f(10) = \sqrt{99}, f_{min} = f(5) = \sqrt{24}$.

2. Določi število tako, da bo vsota tega števila in njegovega kvadrata najmanjša.

Rešitev.

- Iskano število označimo z a.
- Zapišimo funkcijo $f(a) = a + a^2$.
- Iščemo najmanjšo vrednost (globalni minimum) funkcije $f(a) = a + a^2$ na celi realni osi: $f'(a) = 1 + 2a$.
- Stacionarna točka: $f'(a) = 1 + 2a = 0, a = -\frac{1}{2}$.
- V točki $x_0 = a = -\frac{1}{2}$ je globalni minimum funkcije f.

3. Imamo 100 m žične ograje. Z njo nameravamo omejiti pravokotno zemljišče, ki naj na eni strani meji na že obstoječ raven zid. Koliko lahko največ znaša površina zemljišča?

Rešitev.

- Ploščina pravokotnega zemljišča je $p = a \cdot b$.
- Obseg pravokotnika brez ene stranice je $o = 2a + b = 100$
- Zapišimo funkcijo $p(a) = a \cdot b = a \cdot (100 - 2a) = 100a - 2a^2$.
- Iščemo največjo vrednost (globalni maximum) funkcije $p(a) = 100a - 2a^2, \quad p'(a) = 100 - 4a$
- Stacionarna točka: $f'(a) = 100 - 4a = 0, a = 25m, b = 50m$
- Površina (oz. ploščina) zemljišča je enaka $a \cdot b = 3750m^2$.

4. V pravokotnem trikotniku je zveza med katetama x in y, $y + 3x = 6$. Koliko morata znašati kateti, da bo hipotenuza z najmanjša?

Rešitev.

- Ker imamo pravokotni trikotnik je zveza med katetama in hipotenuzo enaka $z^2 = x^2 + y^2$.
- Uporabimo zvezo med katetama ter izrazimo y kateto. Velja: $y = 6 - 3x$.
- Zapišimo funkcijo $z(x) = \sqrt{x^2 + (6 - 3x)^2}$.
- Iščemo najmanjšo vrednost (globalni minimum) funkcije $z(x) = \sqrt{x}^2 + (6 - 3x)^2$.
- $z'(x) = \frac{10x-18}{\sqrt{(10x^2-36x+36)}}$.
- Stacionarna točka: $z'(x) = \frac{10x-18}{\sqrt{(10x^2-36x+36)}} = 0,\ x = \frac{9}{5}, \quad y = \frac{3}{5}$.
- V točki $x = \frac{9}{5}$ je globalni minimum.

5. Kateri pokončni stožec z dano površino $P = 18\pi$ ima največjo prostornino.

Rešitev.

- Površina pokončnega stožca je $P = \pi r^2 + \pi r s$, kjer je s stranska višina stožca.
- Iz enačbe $18\pi = \pi r^2 + \pi r s$ sledi, da je $s^2 = \left(\frac{18\pi - \pi r^2}{\pi r}\right)^2$.
- Izrazimo višino stožca v s pomočjo polmera r ter stranske višine s.
- Ker je $v^2 = s^2 - r^2$ sledi, da je $v = \sqrt{\left(\frac{18\pi - \pi r^2}{\pi r}\right)^2 - r^2}$.
- Prostornina stožca je enaka $V = \frac{\pi r^2 v}{3}$.
- Zapišimo funkcijo $V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 \left(\sqrt{\left(\frac{18\pi - \pi r^2}{\pi r}\right)^2 - r^2}\right)$.
- Iščemo največjo vrednost funkcije $V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 \left(\sqrt{\left(\frac{18\pi - \pi r^2}{\pi r}\right)^2 - r^2}\right)$.
- Stacionarna točka: $V'(r) = \frac{108\pi^2 r - 24\pi^2 r^3}{324\pi^2 r^2 - 36\pi^2 r^4 \frac{1}{2}}$.
- $r = \sqrt{\frac{9}{2}} = 2,12, \quad s = 26,5$.

6. Kakšne so razsežnosti kvadra, pri katerem je dolžina dvakrat daljša od širine, prostornina meri $400m^3$, površina pa je minimalna.

Rešitev.

- Prostornina kvadra je $V = a \cdot b \cdot c = (2b) \cdot b \cdot c = 400m^3$.
- Površina kvadra je $P = 2ab + 2ac + 2bc = 2(2b)b + 2(2b)c + 2bc$.
- Zapišimo funkcijo $P(b) = 2(2b)b + 2(2b)(\frac{200}{b^2}) + 2b(\frac{200}{b^2})$.
- Iščemo najmanjšo vrednost (globalni minimum) funkcije $P(b) = 2(2b)b + 2(2b)(\frac{200}{b^2}) + 2b(\frac{200}{b^2})$. $P'(b) = 8b - \frac{1200}{b^2}$.
- Stacionarna točka: $P'(b) = 8b - \frac{1200}{b^2} = 0, b = 5,31m, a = 10,62m, c = 7,1m$.

Poglavje 2

Integral

2.1 Nedoločeni integral

1. Izračunajte nedoločene integrale:

   (a) $\int (3x^4 + 5x - 2)dx$

   (b) $\int (x-2)(3-x^2)dx$

   (c) $\int (-2\sqrt{x} + 4)dx$

   (d) $\int (\frac{2x^4-3x}{x})dx$

   (e) $\int (x\sqrt[2]{x^3} + \frac{2}{x^4})dx$

   (f) $\int \frac{x^2+1}{x^2+x}dx$

   (g) $\int \frac{1}{x^2-3x-4}dx$

   (h) $\int \frac{x}{x-3}dx$

   (i) $\int \frac{4\cdot 3^x - 3\cdot 4^x}{3^x}dx$

   (j) $\int \sqrt{x\sqrt{x}}(1-\frac{1}{x})dx$

   (k) $\int \tan^2 x dx$

   (l) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos(2x)}dx$

Rešitev.

(a) $\int(3x^4+5x-2)dx = \int 3x^4dx + \int 5xdx + \int -2dx = 3\int x^4dx + 5\int xdx - 2\int dx = \frac{3}{5}x^5 + \frac{5}{2}x^2 - 2x + C.$

(b) $\int(x-2)(3-x^2)dx = \int(3x-x^3-6+2x^2)dx = 3\int xdx - \int x^3dx - 6\int dx + 2\int x^2dx = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - 6x + \frac{2}{3}x^2 + C.$

(c) $\int(-2\sqrt{x}+4)dx = -2\int x^{\frac{1}{2}}dx + 4\int dx = -2\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x + C.$

(d) $\int(\frac{2x^4-3x}{x})dx = \int(\frac{2x^4}{x} - \frac{3x}{x})dx = \int(2x^3-3)dx = \frac{1}{2}x^4 - 3x + C.$

(e) $\int(x^2\sqrt[2]{x^3} + \frac{2}{x^4})dx = \int(x^2x^{\frac{3}{2}}+2x^{-4})dx = \int(x^{\frac{7}{2}}+2x^{-4})dx = \frac{2}{9}x^{\frac{9}{2}} + \frac{2}{-3}x^{-3} + C.$

(f) $\int\frac{x^2+1}{x^2+x}dx = \int\frac{x^2+1}{x(x+1)}dx.$
Pomagajmo si z parcialnimi ulomki. $\frac{x^2+1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)}.$
Enačbo pomnožimo z $x(x+1)$.
$x^2+1 = A\cdot(x+1) + B\cdot x$; $x^2+1 = (A+B)x + A.$
Ker je $A+B=0$ in $A=1$ velja, da je $A=1$ in $B=-1$.
Integral lahko sedaj zapišemo kot $\int\frac{x^2+1}{x(x+1)}dx = \int(\frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)})dx = \int\frac{1}{x}dx - \int\frac{1}{(x+1)}dx = \ln x - \ln(x+1) + C.$

(g) $\int\frac{1}{x^2-3x-4}dx = \int\frac{1}{(x+1)(x-4)}dx.$
Pomagajmo si z parcialnimi ulomki. $\frac{1}{(x+1)(x-4)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-4)}.$
Enačbo pomnožimo z $(x+1)(x-4)$.
$1 = A(x-4) + B(x+1)$; $1 = (A+B)x + (B-4A).$
Ker je $A+B=0$ in $B-4A=1$ velja, da je $A=-1$ in $B=1$.
$\int\frac{1}{(x+1)(x-4)}dx = -\int\frac{1}{(x+1)}dx + \int\frac{1}{(x-4)}dx = -\ln(x+1) + \ln(x-4) + C = \frac{(x-4)}{(x+1)}.$

(h) $\int\frac{x}{x-3}dx = \int\frac{x-3+3}{x-3}dx = \int(\frac{x-3}{x-3} + \frac{3}{x-3})dx = \int dx + 3\int\frac{1}{(x-3)}dx = x + 3\ln(x-3) + C.$

(i) $\int\frac{4\cdot3^x-3\cdot4^x}{3^x}dx = \int(\frac{4\cdot3^x}{3^x} - \frac{3\cdot4^x}{3^x})dx = 4\int\frac{3^x}{3^x}dx - 3\int\frac{4^x}{3^x}dx = 4\int dx - 3\int(\frac{4}{3})^x dx = 4x - 3\cdot\frac{(\frac{4}{3})^x}{\ln(\frac{4}{3})} + C.$

(j) $\int \sqrt{x\sqrt{x}}(1-\frac{1}{x})dx = \int x^{\frac{3}{4}}(1-\frac{1}{4})dx = \int(x^{\frac{3}{4}} - x^{-\frac{1}{4}})dx = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C.$

(k) $\int \tan^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \tan x - x + C.$

(l) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos(2x)}dx = \int \frac{1+\frac{1}{2}(\cos 2x+1)}{1+\cos(2x)}dx = \int \frac{1}{1+\cos 2x}dx + \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}\tan x + \frac{1}{2}x + C.$

2. Z uvedbo nove neznanke izračunajte nedoločene integrale:

(a) $\int (5x-3)^8 dx$

(b) $\int \frac{dx}{3x+2}$

(c) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-3}}$

(d) $\int e^{7x-4}dx$

(e) $\int x\sqrt{x^2+3}dx$

(f) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx$

(g) $\int \tan x dx$

(h) $\int \frac{\sin x \cdot \cos^2 x}{1+\cos^2 x}dx$

(i) $\int \frac{1}{x \cdot \ln x}dx$

(j) $\int \sin(2x-1)dx$

(k) $\int xe^{2x^2+3}dx$

(l) $\int 2x\sin(x^2+3)dx$

(m) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

(n) $\int \frac{\ln^3 x}{4x}dx$

(o) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$

(p) $\int \frac{dx}{x^2+5x+6}$

Rešitev.

(a) Nova neznanka je $t = 5x - 3$, $dt = 5dx$. Torej je $\int (5x-3)^8 dx = \frac{1}{5}\int t^8 dt = \frac{1}{45}t^9 + C = \frac{1}{45}\cdot(5x-3)^9 + C$.

(b) Nova neznanka je $t = 3x+2$, $dt = 3dx$. Iz tega sledi $\int \frac{dx}{3x+2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t}$ $\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln t + C = \frac{1}{3}\ln(3x+2) + C$.

(c) Nova neznanka je $t = 2x - 3$, $dt = 2dx$. Potem je $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x-3}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{2}\int t^{\frac{-1}{3}}dt = \frac{3}{4}t^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{4}(2x-3)^{\frac{2}{3}} + C$.

(d) Nova neznanka je $t = 7x - 4$, $dt = 7dx$. Potem je $\int e^{7x-4}dx = \frac{1}{7}\int e^t dt = \frac{1}{7}e^t + C = \frac{1}{7}e^{7x-4} + C$.

(e) Nova neznanka je $t = x^2+3$, $dt = 2xdx$. Iz tega sledi $\int (x\sqrt{x^2+3})dx = \int x\sqrt{t}\frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(x^2+3)^{\frac{3}{2}} + C$.

(f) Nova neznanka je $t = e^{2x}$, $dt = 2e^{2x}dx$. Iz tega sledi $\int \frac{e^{2x}}{1+t^2}\frac{dt}{2e^{2x}} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\arctan t + C = \frac{1}{2}\arctan(e^{2x}) + C$.

(g) Nova neznanka je $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$. Iz tega sledi $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \int \frac{\sin x}{t}\frac{dt}{-\sin x} = -\int \frac{1}{t}dt = -\ln t + C = -\ln(\cos x) + C$.

(h) Nova neznanka je $t = \cos x$, $dt = -\sin x dx$. Potem je $\int \frac{\sin x\cdot t^2}{1+t^2}\frac{dt}{-\sin x} = -\int \frac{t^2}{1+t^2}dt = -\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = -(\int \frac{t^2+1}{t^2+1}dt - \int \frac{1}{t^2+1}dt) = -(\int dt - \int \frac{1}{t^2+1}dt) = -(t - \arctan t) + C = -\cos x + \arctan(\cos x) + C$.

(i) Nova neznanka je $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$. Potem je $\int \frac{1}{x\cdot\ln x}dx = \int \frac{1}{x\cdot t}xdt = \int \frac{1}{t}dt = \ln t + C = \ln(\ln x) + C$.

(j) Nova neznanka je $t = 2x-1$, $dt = 2dx$. Potem je $\int \sin(2x-1)dx = \int \sin(t)\frac{dt}{2} = -\frac{1}{2}\cos t + C = -\frac{1}{2}\cos(2x-1) + C$.

(k) Nova neznanka je $t = 2x^2 + 3$, $dt = 4xdx$. Potem je $\int xe^{2x^2+3}dx = \int xe^t\frac{dt}{4x} = \frac{1}{4}\int e^t dt = \frac{1}{4}e^t + C = \frac{1}{4}e^{2x^2+3} + C$.

(l) Nova neznanka je $t = x^2+3$, $dt = 2xdx$. Potem je $\int 2x\sin(x^2+3)dx = \int 2x\sin t\frac{dt}{2x} = \int \sin t = -\cos t + C = -\cos(x^2+3) + C$.

(m) Nova neznanka je $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$. Potem je $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{txdt}{x} = \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C$.

(n) Nova neznanka je $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$. Potem je $\int \frac{\ln^3 x}{4x} dx = \int \frac{t^3 xdt}{4x} = \frac{1}{4} \int t^3 dt = \frac{1}{4} \frac{t^4}{4} + C = \frac{t^4}{16} + C = \frac{\ln^4 x}{16} + C$.

(o) Najprej zapišimo ulomek $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$ kot vsoto dveh ulomkov, torej $\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$. Pomnožimo enakost z izrazom $(x+1)(x-2)$. Potem je $1 = A(x-2) + B(x+1)$, iz česar sledi $A + B = 0$ in $-2A + B = 1$. $A = -\frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{3}$.
Iz tega sledi $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-2} = -\frac{1}{3} \ln(x+1) + \frac{1}{3} \ln(x-2) + C = \frac{1}{3} \ln(\frac{x-2}{x+1}) + C$.

(p) Kot v prejšnjem primeru zapišemo $\frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+2}$. Ko pomnožimo zapisano enakost z izrazom $x^2 + 5x + 6$, je $1 = A(x+2) + B(x+3)$. Torej je $A + B = 0$ in $2A + 3B = 1$. Rešitev tega sistema je $B = 1$ in $A = -1$. Iz tega sledi, da je $\int \frac{dx}{x^2+5x+6} = \int \frac{-dx}{x+3} + \int \frac{dx}{x+2} = -\ln(x+3) + \ln(x+2) + C = \ln |\frac{x+2}{x+3}| + C$.

3. Z metodo per partes izračunajte nedoločene integrale:

(a) $\int ((5x+7)e^{3x+2}) dx$

(b) $\int (x^2 \cdot e^{2x}) dx$

(c) $\int ((x+2) \cos 3x) dx$

(d) $\int (\sin x (3-x)) dx$

(e) $\int (e^{2x} \cdot \sin x) dx$

(f) $\int (\ln(-3x)) dx$

(g) $\int ((x^2 + x) \cdot \ln(x)) dx$

Rešitev. Integriranje po delih (metoda perpartes):

$$\int udv = uv - \int vdu$$

(a) Vpeljemo $u = 5x + 7$ in $dv = e^{3x+2}dx$. Potem je $du = 5dx$ in $v = \frac{1}{3}e^{3x+2}$. Iz tega sledi $\int(5x + 7)e^{3x+2}dx = \frac{1}{3}(5x + 7)e^{3x+2} - \int \frac{5}{3}e^{3x+2}dx = \frac{1}{3}(5x + 7)e^{3x+2} - \frac{5}{9}e^{3x+2} + C$.

(b) Vpeljemo $u = x^2$ in $dv = e^{2x}dx$. Potem je $du = 2xdx$ ter $\int dv = \int e^{2x}dx$ in od tod $v = \frac{1}{2}e^{2x}$. Torej je $\int x^2 \cdot e^{2x}dx = x^2 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int xe^{2x}dx$. Ponovno uporabimo integriranje po delih. Vpeljemo $u = x$ in $dv = e^{2x}dx$. Potem je $\int xe^{2x}dx = x\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx = x\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$. Končna rešitev je $x^2 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - x\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C$.

(c) Uvedemo $u = x + 2$ in $dv = \cos 3xdx$ ter izračunamo $du = dx$, $v = \frac{1}{3}\sin 3x$. Potem je $\int(x + 2)\cos 3x = (x + 2)\frac{1}{3}\sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3xdx = (x + 2)\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C$.

(d) Uvedemo $u = e^{2x}$, $dv = \sin xdx$ in izračunamo $du = 2e^{2x}dx$ ter $v = -\cos x$. Iz tega sledi $\int e^{2x}\sin xdx = -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos xdx + C$. Integral $\int e^{2x}\cos xdx$ sedaj ponovno zapišemo s pomočjo perpartesa.
$\int e^{2x}\cos xdx = e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin x$. Končen integral je tako enak $\int e^{2x}\sin xdx = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4\int e^{2x}\sin x + C$.
Sedaj uvedemo namesto $\int e^{2x}\sin xdx$ novo neznanko u. Od tod dobimo $u = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4u + C$.
$u = \frac{-e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x}{5} + C$

(e) Uvedemo $u = 3 - x$, $dv = \sin xdx$ in izračunamo $du = dx$ ter $v = -\cos x$. Iz tega sledi $\int(3-x)\sin xdx = -(3-x)\cos x + \int cosxdx = -(3 - x)\cos x + \sin x + C$.

(f) Uvedemo $u = \ln(-3x)$, $dv = dx$ in izračunamo $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$. Potem je $\int \ln(-3x)dx = x\ln(-3x) - \int \frac{xdx}{x} = x\ln(-3x) - \int dx = x\ln(-3x) - x + C$.

(g) Uvedemo $u = \ln x$, $dv = (x^2 + x)dx$ in izračunamo $du = \frac{dx}{x}$ ter $v = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$. Potem je $\int(x^2 + x) \cdot \ln(x)dx = (\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2})\ln x - \int(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}) \cdot \frac{1}{x}dx = (\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2})\ln x - \int(\frac{x^2}{3} + \frac{x}{2})dx = (\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2})\ln x - ((\frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4})dx + C$.

4. Izračunajte nedoločene integrale:

(a) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$

(b) $\int \frac{\ln(x+2)}{x^2} dx$

(c) $\int \frac{e^x-1}{e^x+1} dx$

(d) $\int \frac{1}{\cos x} dx$

(e) $\int \ln^2(2x) dx$

Rešitev.

(a) Števec zapišemo nekoliko drugače: $\sin^3 x = (\sin^2 x) \cdot (\sin x) = (1 - \cos^2 x) \cdot (\sin x)$. Integral $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$ zapišemo kot razliko dveh integralov $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$. Uvedemo novo neznanko $t = \cos x$, $dx = \frac{dt}{-\sin x}$. Potem je $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx = -\int \frac{1}{t^4}$. Podobno $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$. Rezultat je tako enak $\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t} = \frac{1}{(\cos x)^3} + \frac{1}{\cos x} + C$.

(b) Integral $\int \frac{\ln(x+2)}{x^2} dx$ zapišemo nekoliko drugače $\int \ln(x+2) x^{-2} dx$. Sedaj uporabimo integriranje po delih. $\ln(x+2) = u,\ \ x^{-2}dx = dv$. $\int \frac{\ln(x+2)}{x^2} dx = -\frac{\ln(x+2)}{x} + \int \frac{1}{(x)(x+2)} dx$. Za izračun drugega integrala si pomagamo s parcialnimi ulomki $\frac{1}{(x)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$. Od tod sledi $\int \frac{1}{(x)(x+2)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+2)}$. Rezultat je enak $\int \frac{\ln(x+2)}{x^2} dx = -\frac{\ln(x+2)}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x+2)} = -\frac{\ln(x+2)}{x} + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \ln(x+2) + C$.

(c) Števec zapišemo nekoliko drugače: $e^x - 1 = e^x + 1 - 2$.. Od tod velja $\int \frac{e^x-1}{e^x+1} dx = \int \frac{e^x+1-2}{e^x+1} dx = \int \frac{e^x+1}{e^x+1} dx - 2 \int \frac{1}{e^x+1} dx = 1 - 2 \int \frac{1}{e^x+1} dx$. Drugi integral rešimo tako, da uvedemo novo neznanko $t = e^x + 1,\ \ dt = e^x dx$. Temu sledi $\int \frac{1}{e^x+1} dx = \int \frac{1}{(t)(t-1)} dt$. Sedaj uporabimo parcialne ulomke $\int \frac{1}{(t)(t-1)} dt = -\int \frac{1}{t} dt + \int \frac{1}{t-1} dt$. Rezultat drugega integrala je enak $-\ln t + \ln(t-1) + C = -\ln(e^x+1) + \ln(e^x) + C$. Končen rezultat je enak $\int \frac{e^x-1}{e^x+1} dx = 1 + 2\ln(e^x+1) - 2\ln(e^x)) + C$.

(d) Števec in imenovalec pomnožimo s $\cos x$. Dobljeni integral $\int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx$ zapišemo nekoliko drugače $\int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx$. Uvedemo novo neznanko $t = \sin x,\ \ dt = \cos x dx$. Dobljeni integral $\int \frac{1}{1-t^2}$ razpišemo s pomočjo parcialnih ulomkov kot $\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-t}$. Po uvedbi novih neznank dobimo $\frac{1}{2}(\ln(t+1)-\ln(t-1))+C$. Končna rešitev je tako enaka $\frac{1}{2}\ln(\frac{t+1}{t-1})+C=\frac{1}{2}\ln(\frac{\sin x+1}{\sin x-1})+C$.

(e) Uporabimo integriranje po delih. $u=\ln^2(2x)$, $dv=dx$. Od tod sledi $du=2\ln(2x)\frac{1}{2x}2dx$, $v=x$. Integral sedaj zapišemo kot $\int\ln^2(2x)dx=x\ln^2(2x)-\int(x\cdot(2\ln(2x)\frac{1}{2x}2))dx=x\ln^2(2x)-2(\int\ln(2x)dx)$. Za izračun drugega integrala ponovno uporabimo integriranje po delih. $u=\ln(2x)$, $du=\frac{1}{x}$, $dv=dx$, $v=x$. Končen rezultat je enak $\int\ln^2(2x)dx=x\ln^2(2x)-2(x\ln(2x)-\int dx)+C=x\ln^2(2x)-2x\ln(2x)+2x+C$.

2.2 Določeni integral

1. Izračunajte določene integrale.

(a) $\int_{-1}^{2}(3x^2-4)dx$

(b) $\int_0^3(x+2)(x-3)dx$

(c) $\int_0^1(e^x+7x^3+\sin x)dx$

(d) $\int_1^3(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+x-2)dx$

(e) $\int_0^{\pi}\sin x dx$

(f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$

Rešitev.

(a) $\int_{-1}^{2}(3x^2-4)dx=3\int_{-1}^{2}x^2dx-4\int_{-1}^{2}dx=x^3|_{-1}^{2}-4x|_{-1}^{2}=((8-(-1))-4((2)-(-1))=9-12=-3$.

(b) $\int_0^3(x+2)(x-3)dx=\int_0^3(x^2-x-6)dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-6x|_0^3=((9-\frac{9}{2}-18)-0)=9-\frac{9}{2}-18=-13,5$.

(c) $\int_0^1 (e^x + 7x^3 + \sin x)dx = (e^x + 7\frac{x^4}{4}x - \cos x)|_0^1 = (e + \frac{7}{4} - \cos 1) - (1 + 0 - 1) = (e + \frac{7}{4} - \cos 1)$.

(d) $\int_1^3 (\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + x - 2)dx = \int_1^3 (x^{\frac{-2}{3}} + x - 2)dx = (3x^{\frac{1}{3}} + \frac{x^2}{2} - 2x)|_1^3 = (3 \cdot 3^{\frac{1}{3}} + \frac{9}{2} - 6) - (3 + \frac{1}{2} - 2) = 3^{\frac{4}{3}} - 3$.

(e) $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$.

(f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$.

2. Z uvedbo nove neznanke izračunajte določene integrale.

(a) $\int_0^1 \sqrt{x+1}dx$

(b) $\int_{-1}^2 (\frac{x}{x^2+4})dx$

(c) $\int_0^{\ln \sqrt{3}} (\frac{e^x}{e^{2x}-1})dx$

(d) $\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$

(e) $\int_0^1 (2x+1)^5 dx$

(f) $\int_0^1 e^{7x-3}dx$

(g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x \cdot \sin^2 x)dx$

(h) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$

Rešitev.

(a) V določeni integral vpeljemo novo neznanko $t = x + 1$, $dt = dx$. Meji za neznanko t sta:

- spodnja meja: ko je $x = 0$ je $t = 1$.
- zgornja meja: ko je $x = 1$ je $t = 2$.

Od tod sledi $\int_0^1 \sqrt{x+1}dx = \int_1^2 \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1)$.

(b) Vpeljemo novo neznanko $t = x^2+4$, $dt = 2xdx$. Potem je $\int_{-1}^2 (\frac{x}{x^2+4})dx = \int_5^8 \frac{x}{t} \cdot \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2}\int_5^8 \frac{1}{t}dt = \frac{1}{2}\ln t|_5^8 = \frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 5)$.

(c) Vpeljemo novo neznanko $t = e^x$, $dt = e^x dx$. Potem je $\int_0^{\ln \sqrt{3}} (\frac{e^x}{e^{2x}-1})dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2-1}dt = \frac{1}{2}\ln(\frac{x-1}{x+1})|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\ln(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}) - \ln 0 = \frac{1}{2}(\ln(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1})$.

(d) Vpeljemo novo neznanko $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x}dx$. Potem je $\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\ln x)}{x}dx = \int_0^\pi \frac{\sin(t)dtx}{x} = \int_0^\pi \sin t dt = -\cos t|_0^\pi = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$.

(e) Vpeljemo novo neznanko $t = 2x+1$, $dt = 2dx$. Potem je $\int_0^1 (2x+1)^5 dx = \int_1^3 (t)^5 dx = \frac{t^6}{6}|_1^3 = (\frac{243}{4}) - (\frac{1}{6}) = \frac{727}{12}$.

(f) Vpeljemo novo neznanko $t = 7x-3$, $dt = 7dx$. Potem je $\int_0^1 e^{7x-3}dx = \int_{-3}^4 e^t \frac{dt}{7} = \frac{1}{7}e^t|_{-3}^4 = \frac{1}{7}(e^4 - e^{-3})$.

(g) Vpeljemo novo neznanko $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$. Potem je $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin^2 x dx = \int_0^1 \cos x \cdot t^2 \frac{dt}{\cos x} = \int_0^1 t^2 = \frac{t^3}{3}|_0^1 = (\frac{1}{3} - 0) = \frac{1}{3}$.

(h) Vpeljemo novo neznanko $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$. Potem je $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int_0^1 \frac{t^2 x dt}{x} = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}|_0^1 = (\frac{1}{3}) - (\frac{0}{3}) = \frac{1}{3}$.

3. Z metodo per partes izračunajte določene integrale.

(a) $\int_{-1}^1 (2x+3)e^x dx$

(b) $\int_1^e 2\ln x dx$

(c) $\int_{-1}^1 x^2 \cdot e^{-x} dx$

(d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin 2x dx$

Rešitev. Integriranje po delih:

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du.$$

(a) Vpeljemo $u = 2x+3$ in $dv = e^x dx$. Potem je $du = 2dx$ in $v = e^x$. Sledi $\int_{-1}^1 (2x+3)e^x dx = (2x+3)e^x|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x 2dx = (5e^1) - (e^{-1}) - 2e^x|_{-1}^1 = 5e - (e^{-1}) - 2(e - e^{-1}) = 3e + e^{-1}$.

(b) Uvedemo $u = \ln x$, $dv = dx$. Potem je $du = \frac{dx}{x}$ in $v = x$. Sledi $2\int_1^e \ln x dx = 2(x \ln x|_1^e - \int_1^e dx) = 2(e - x|_1^e) = 2(e - (e-1)) = 2$.

(c) Uvedemo $u = x^2$, $dv = e^{-x}dx$. Potem je $du = 2xdx$ in $v = -e^{-x}$. Sledi $\int_{-1}^{1} x^2 \cdot e^{-x}dx = x^2(-e^{-x})|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(-e^{-x}2x)dx = x^2(-e^{-x})|_{-1}^{1} + 2(\int_{-1}^{1} e^{-x}xdx) = x^2(-e^{-x})|_{-1}^{1} + 2(x(-e^{-x})|_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} e^{-x}dx) = -e^{-1} + e + 2(-e^{-1} + e + (-e^{-x})|_{-1}^{1}) = -e^{-1} + e + 2(-e^{-1} + e + (-e^{-1} + e)) = -5e^{-1} + 5e$.

(d) Uvedemo $u = x$, $dv = \sin 2x$. Sledi $du = dx$ in $v = -\frac{1}{2}\cos 2x$. Torej je $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin 2xdx = -x\frac{1}{2}\cos 2x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}\cos 2xdx = \frac{1}{4}\sin 2x|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}(-1-1) = -\frac{1}{2}$.

4. Izračunajte posplošene integrale.

(a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$

(b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^5}}$

(c) $\int_1^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(2+x)}dx$

(d) $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$

(e) $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$

Rešitev.

(a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-3}dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{x^{-2}}{2}|_1^b = \lim_{b\to\infty}(-\frac{b^{-2}}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

(b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^5}} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x^5}} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-\frac{5}{2}}dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}|_1^b = \lim_{b\to\infty}(-\frac{2}{3}b^{-\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$.

(c) Najprej izračunamo nedoločeni integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{(1-x^2)(2+x)}dx$. Ulomek $\frac{1}{(1-x^2)(2+x)}$ zapišemo kot vsoto treh ulomkov, torej $\frac{1}{(1-x^2)(2+x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{b}{1+x} + \frac{C}{2+x}$. Pomnožimo enakost z izrazom $(1-x)(1+x)(2+x)$. Potem je $1 = (A-B-C)x^2 + (3A-B)x + (2A+2B+C)$, iz česar sledi $A-B-C = 0$, $3A-B = 0$ in $2A+2B+C = 1$. $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{2}$ ter $C = -\frac{1}{3}$.
od tod sledi $\int \frac{dx}{(1-x^2)(2+x)} = \int(\frac{1}{6(1-x)} + \frac{1}{5(1+x)} - \frac{1}{3(2+x)})dx = \frac{1}{6}\ln(1-x) + \frac{1}{5}\ln(1+x) - \frac{1}{3}\ln(2+x) + C$

(d) $\int_0^\infty e^{-x} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}(-e^{-x})|_0^b = \lim_{b\to\infty}(-e^{-b} + 1) = 1.$

(e) Najprej izračunajmo integral $\int xe^{-x^2}dx$. Vpeljemo novo neznanko $-x^2 = t$ in $-2xdx = dt$. Potem je

$$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

Iz tega sledi

$$\begin{aligned}\int_0^\infty xe^{-x^2}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x^2}dx \\ &= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}e^{-x^2}|_0^b = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}(e^{-b^2} - 1) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

5. Izračunajte povprečno vrednost dane funkcije f na intervalu I.

(a) $f(x) = \sqrt{2+x}$, $I = [-2, 2]$

(b) $f(x) = \frac{x}{2x^2+1}$, $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

(c) $f(x) = e^{3x-1}$, $I = [0, 2]$

(d) $f(x) = \ln x$, $I = [1, e]$

(e) $f(x) = \sin^2 x$, $I = [0, \pi]$

Rešitev. Povprečna vrednost integrabilne funkcije f na intervalu $[a, b]$: $\overline{f} = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$

(a) $\overline{f} = \frac{1}{4}\int_{-2}^2 (\sqrt{2+x})dx = \frac{1}{4}\int_{-2}^2 t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2}{12}(2+x)^{\frac{3}{2}}|_{-2}^2 = \frac{1}{6}(2+x)^{\frac{3}{2}}|_{-2}^2 = (\frac{8}{6}) - (0) = \frac{4}{3}.$

(b) $\overline{f} = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x}{2x^2+1}dx$. Uvedemo novo neznanko $t = 2x^2 + 1$. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{4t} = \frac{1}{2}\ln(2x^2+1)|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2}\ln(3) - \frac{1}{2}\ln(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\ln 2.$

(c) $\overline{f} = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{3x-1}dx$. Uvedemo novo neznanko $t = 3x - 1$, $dt = 3dx$. $\frac{1}{2}\int_0^2 e^t\frac{dt}{3} = \frac{1}{6}e^{3x-1}|_0^2 = (\frac{1}{6}e^5) - (\frac{1}{6}e^{-1})$

(d) $\overline{f} = \frac{1}{e-1}\int_1^e \ln x dx$. Uvedemo $u = \ln x$, $dv = dx$. Potem je $du = \frac{dx}{x}$ in $v = x$. $\frac{1}{e-1}\int_1^e \ln x dx = \frac{1}{e-1}(x\ln x|_1^e - \int_1^e dx) = \frac{1}{e-1}x(\ln x - 1)|_1^e = \frac{1}{e-1}((e-1)+1) = \frac{e}{e-1}$

(e) $\overline{f} = \frac{1}{(\pi)}\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{1}{(\pi)} - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2x - 1 dx = -\frac{1}{(2\pi)}(\int_0^\pi \cos 2x dx) - \int_0^\pi dx) = -\frac{1}{(2\pi)}(\frac{1}{2}\sin 2x - x)|_0^\pi = (-\frac{1}{(2\pi)}(0-\pi)) + 0 = \frac{1}{2}$

2.3 Uporaba integrala

1. Izračunajte ploščino lika, omejenega s funkcijami $f(x) = \sqrt{2x+1}$ in $g(x) = 7 - x$.

   Rešitev.
   Za pomoč si narišemo graf funkcije ter izračunamo presečišča. Funkcijska zapisa enačimo $\sqrt{2x+1} = 7 - x$. Od tod dobimo, da je edina prava rešitev $x = 4$. Za izračun ploščine tako zapišemo določeni integral. $\int_{-\frac{1}{2}}^4 \sqrt{2x+1}dx + \int_4^7 (7-x)dx = \frac{27}{2} \approx 13,5$.

2. Izračunajte ploščino lika, omejenega s funkcijami $f(x) = x + 2$ in $g(x) = x^2$.

   Rešitev.
   $\int_{-1}^2 (2 + x - x^2)dx = \frac{9}{2} \approx 4,5$.

3. Izračunajte ploščino lika, omejenega s funkcijami $f(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ in $g(x) = x^2$.

   Rešitev.
   $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (1 - \frac{x^2}{2})dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} \approx 1,88$.

4. Izračunajte ploščino lika, omejenega s funkcijami $f(x) = x^2 + 2x - 3$ in $g(x) = x - 1$.

Rešitev.
$\int_{-2}^{1}(2-x-x^2)dx = \frac{9}{2} \approx 4,5.$

5. Izračunajte ploščino lika, omejenega s funkcijami $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ in ordinatno osjo.

Rešitev.
$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x - \sin x)dx = \sqrt{2} - 1 \approx 0,41.$

6. Izračunajte ploščino lika, omejenega s funkcijami $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$ in ordinatno osjo.

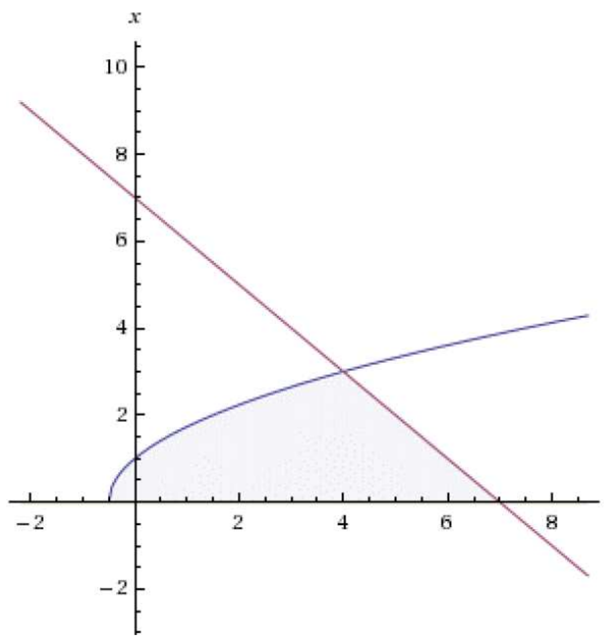
Rešitev.
$\int_{0}^{2}(2^x - x^2)dx = \frac{9-8\ln 2}{3\ln 2} \approx 1,66.$

7. Izračunajte ploščino lika, omejenega s funkcijami $f(x) = \cos x$, $g(x) = 2 - |x|$ in abscisno osjo.

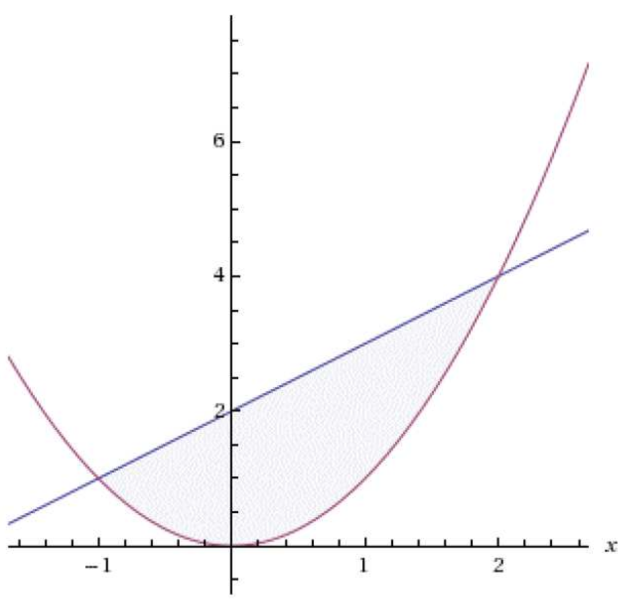
Rešitev.
$2 \cdot (\int_{0}^{2}(2-x)dx - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)dx) \approx 2.$

8. Izračunajte ploščino lika, omejenega s funkcijamo $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 2$, in tangentama nanjo v točkah z abscisama 1 in 4.

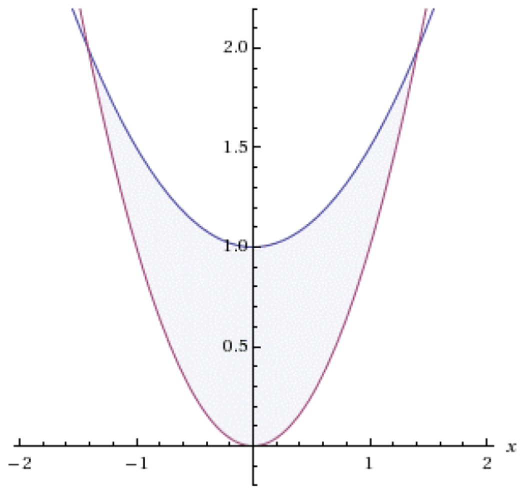
Rešitev.
$f'(x) = x - 2$
Smerni koeficient tangente na graf funkcije v določeni točki je enak prvemu odvodu funkcije v tej točki.
$f'(x_1) = k_{t_1}, f'(1) = -1 = k_{t_1}, f'(4) = 2 = k_{t_2}$
Enačbi tangent: $(y - y_0) = k_{t_1}(x - x_0), (y - \frac{1}{2}) = -1(x-1), y = -x + \frac{3}{2}$
$(y - y_0) = k_{t_2}(x - x_0), (y - 2) = 2(x - 4), y = 2x - 6$
$2 \cdot (\int_{0}^{2}(2-x)dx - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)dx) \approx 2$



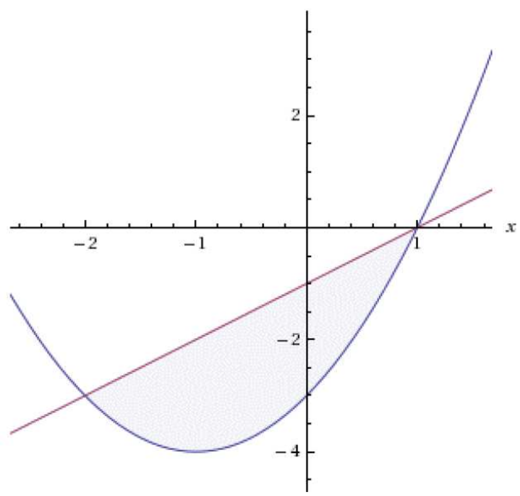
Slika 2.1: $f(x) = \sqrt{2x+1}$ in $g(x) = 7 - x$



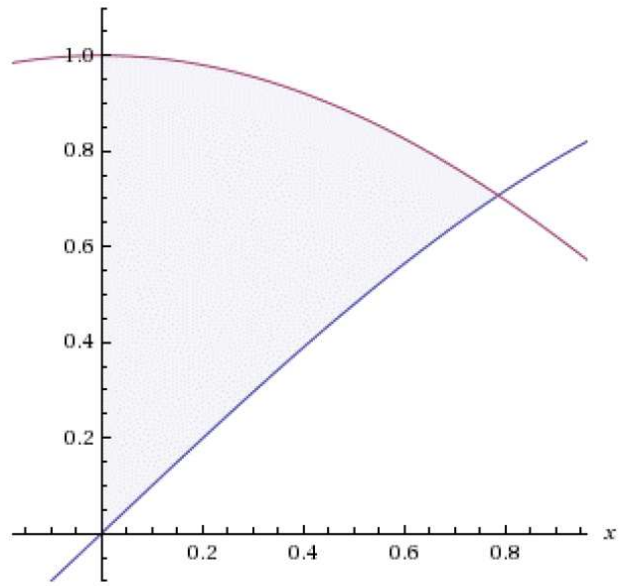
Slika 2.2: $f(x) = x + 2$ in $g(x) = x^2$



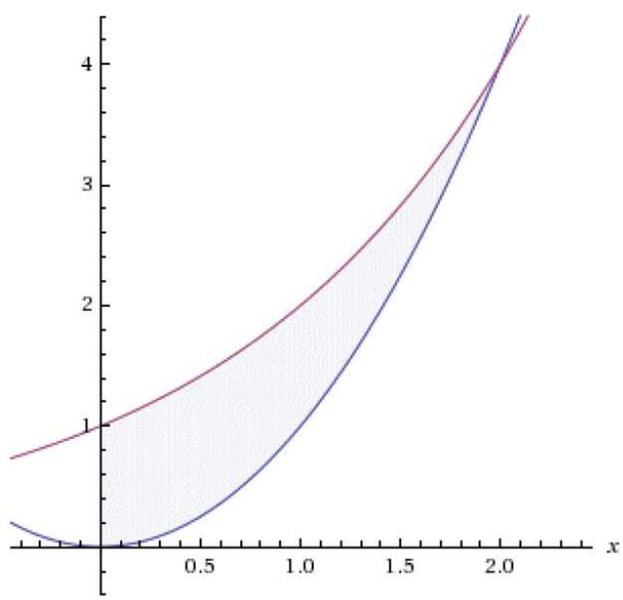
Slika 2.3: $f(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ in $g(x) = x^2$



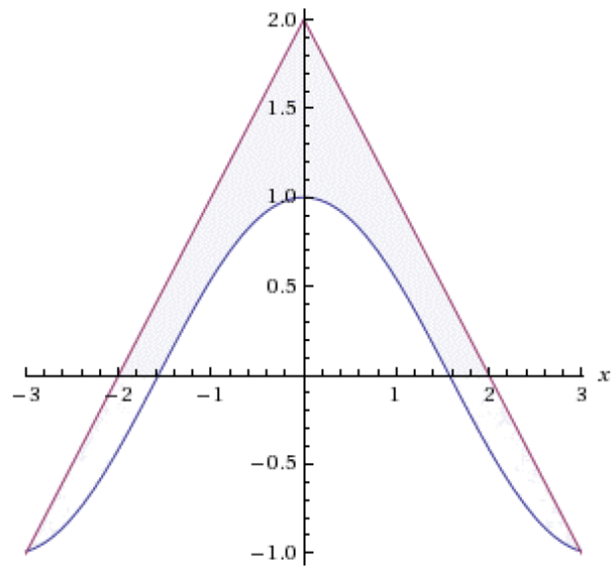
Slika 2.4: $f(x) = x^2 + 2x - 3$ in $g(x) = x - 1$



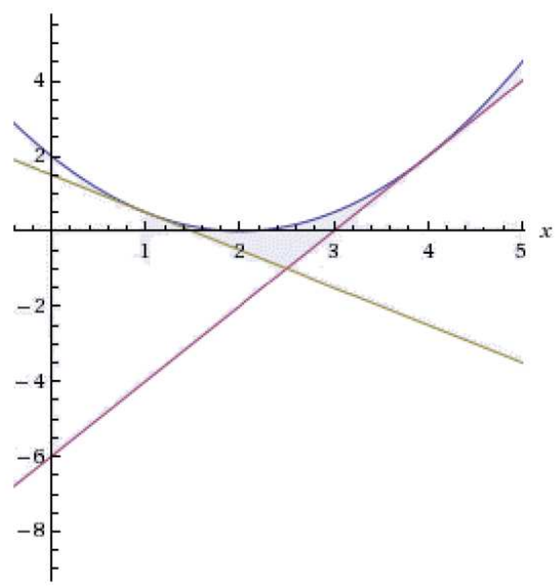
Slika 2.5: $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ in ordinatno osjo



Slika 2.6: $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$ in ordinatno osjo



Slika 2.7: $f(x) = \cos x$, $g(x) = 2 - |x|$ in abscisno osjo



Slika 2.8: $f(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 2$, in tangentama nanjo v točkah z abscisama 1 in 4

Poglavje 3

Diferencialne enačbe

3.1 Diferencialne enačbe prvega reda

1. Poiščite splošne rešitve diferencialne enačbe z ločljivima spremenljivkama:

   (a) $y' = x^2 + 3$

   (b) $2y'x = y$

   (c) $y'(x^2 + 3)^3 = 2x$

   (d) $y'x = \ln^5 x$

   (e) $y'(x + 5)(-x + 4) = y$

   (f) $y' = 3x^2(1 + y^2)$

   (g) $(\sin x)dy = 2y(\cos x)dx$

   (h) $yy' = 2(xy + x)$

   (i) $y' - 2x = 0$

   (j) $xyy' = 1 - x^2$

   (k) $\tan y dx - \cot x dy = 0$

   (l) $y' = \frac{y^2+1}{x^2+1}$

   (m) $(x + 2)dy + y^2 dx = 0$

   (n) $xy' - y = y^3$

Rešitev.

(a) Ker je $\frac{dy}{dx} = x^2 + 3$, je $dy = (x^2 + 3)dx$ in zato $\int dy = \int (x^2 + 3)dx$. Iz tega sledi, da je $y = \frac{x^3}{3} + 3x + C$.

(b) Vidimo, da je $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}$ in zato $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{2x}$. Potem je $\ln y = \ln x^{\frac{1}{2}} + \ln C$, kar pomeni, da je
$\ln y = \ln Cx^{\frac{1}{2}}$. Torej je $y = Cx^{\frac{1}{2}}$.

(c) Ker je $\frac{dy}{dx}(x^2+3)^3 = 2x$ je $dy = \frac{2x}{(x^2+3)^3}dx$. Vpeljemo novo neznanko $t = x^2 + 3$, $dt = 2xdx$. Potem je $\int \frac{2x}{(x^2+3)^3}dx = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3}dt = -\frac{t^{-2}}{2} + C = -\frac{(x^2+3)^{-2}}{2} + C$. Iz tega sledi, da je rešitev diferencialne enačbe $y = -\frac{(x^2+3)^{-2}}{2} + C$.

(d) Ker je $\frac{dy}{dx}x = \ln^5 x$ je $dy = \frac{\ln^5 x}{x}dx$. Izračunajmo integral $\int \frac{\ln^5 x}{x}dx$. Vpeljemo novo neznanko $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$. Torej je $\int \frac{\ln^5 x}{x}dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\ln^6 x}{6} + C$. Iz tega sledi, da je rešitev diferencialne enačbe $y = \frac{\ln^6 x}{6} + C$.

(e) Rešitev enakosti $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{(x+5)(-x+4)} = \int \frac{1}{9(x+5)} + \frac{1}{9(-x+4)}$ je $\ln y = \frac{1}{9}\ln(x+5) - \frac{1}{9}\ln(-x+4) + \ln C$ oziroma zapisano drugače $y = C(\frac{x+5}{-x+4})^{\frac{1}{9}}$.

(f) Ker je $\frac{dy}{dx} = 3x^2(1+y^2)$, je $\frac{dy}{(1+y^2)} = 3x^2dx$ in zato $\int \frac{dy}{(1+y^2)} = \int 3x^2dx$. Iz tega sledi, da je $\tan y = \frac{1}{x^3} + C$.

(g) Rešitev enakosti $\int \frac{dy}{2y} = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$. Vpeljemo novo neznanko $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$ in $dx = \frac{dt}{\cos x}$. Odtod sledi $\int \frac{dy}{2y} = \int \frac{\cos x}{t}\frac{dt}{\cos x}$ in $\frac{1}{2}\ln y = \ln \sin x + \ln C$. Rešitev je enaka $y = (C \sin x)^2$.

(h) $y\frac{dy}{dx} = 2(xy+x)$ od tod sledi $ydy = 2(xy+x)dx$ in $ydy = 2x(y+1)dx$. $\int \frac{y}{y+1}dy = \int 2xdx$. Vpeljemo novo neznanko $t = y + 1$, $dt = dy$. $\int \frac{t-1}{t}dt = \int 2xdx$ je $\int (\frac{t}{t} - \frac{1}{t})dt = 2\int xdx$ in $t - \ln t = x^2 + C$.

(i) Ker je $\frac{dy}{dx} = 2x$, je $1dy = 2xdx$ in zato $\int 1dy = \int 2xdx$. Iz tega sledi, da je $y = x^2 + C$.

(j) $xyy' = 1 - x^2$ sledi $y\frac{dy}{dx} = \frac{1-x^2}{x}$ in $\int ydy = \int \frac{1-x^2}{x}dx$. Odtod dobimo $\frac{y^2}{2} = \ln x - \frac{x^2}{2} + C$ in $y^2 = \sqrt{2\ln x - x^2} + C$.

(k) $\tan ydx - \cot xdy = 0$ je $-\cot xdy = -\tan ydx$. Velja $\frac{1}{\tan y}dy = \frac{1}{\cot x}dx$ in $\sin y = \frac{C}{\cos x}$.

(l) Ker je $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+1}{x^2+1}$, je $\frac{dy}{y^2+1} = \frac{dx}{x^2+1}$ in zato $\int \frac{1}{y^2+1}dy = \int \frac{1}{x^2+1}dx$. Iz tega sledi, da je $y = x + C$.

(m) $(x+2)dy + y^2dx = 0$ sledi $\frac{dy}{y^2} = -\frac{dx}{(x+2)}$ in $\int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{dx}{(x+2)}$. Odtod dobimo $-\frac{1}{y} = -\ln x + 2 + \ln C$ in $y = -\frac{1}{\ln \frac{C}{x+2}}$.

(n) $xy' - y = y^3$ sledi $x\frac{dy}{dx} = y + y^3$. Velja $\int \frac{dy}{y(1+y^2)} = \int \frac{dx}{x}$. Integral $\int \frac{dy}{y(1+y^2)}$ zapišemo kot vsoto integralov $\int \frac{dy}{y(1+y^2)} = \int \frac{1}{y}dy + \int \frac{-y}{1+y^2}dy$. Za izračun drugega integrala $\int \frac{-y}{1+y^2}dy$ uvedemo novo neznanko $t = 1 + y^2$ in dobimo $\ln(1+y^2)^{-\frac{1}{2}}$. Skupna rešitev je $\frac{y}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}} = Cx$.

2. Poiščite tiste rešitve diferencialnih enačb z ločljivima spremenljivkama, ki zadoščajo danim pogojem:

(a) $y - y'x = 2y'$, $y(1) = 1$

(b) $y'e^{-5x} = x + 3$, $y(0) = 1$

(c) $y' = x\cos(3x)$, $y(\frac{\pi}{3}) = 0$

(d) $(2x^2+1)y' - 10xy = 4x$, $y(0) = \frac{1}{2}$

Rešitev.

(a) Vidimo, da je $y'(x+2) = y$ in zato $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+2}$. Iz tega sledi, da je $\ln y = \ln(x+2) + \ln C$. Torej je $y = C(x+2)$. Ker je podan pogoj $y(1) = 1$, je $1 = 3C$ in zato $C = \frac{1}{3}$. Rešitev je $y = \frac{1}{3}(x+2)$.

(b) Ni težko preveriti, da je $y' = (x+3)e^{5x}$ in zato $dy = (x+3)e^{5x}dx$. Z metodo per partes izračunamo integral $\int (x+3)e^{5x}dx$. Uvedemo $u = x+3$ in $dv = e^{5x}$. Potem je $du = dx$ in $v = \frac{1}{5}e^{5x}$. Sledi $\int (x+3)e^{5x}dx = \frac{1}{5}(x+3)e^{5x} - \int \frac{1}{5}e^{5x}dx = \frac{1}{5}(x+3)e^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x} + C$. Splošna rešitev diferencialne enačbe je $y = \frac{1}{5}(x+3)e^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x} + C$. Glede na podan pogoj $y(0) = 1$ je $1 = \frac{3}{5} - \frac{1}{25} + C$ oziroma $1 = \frac{14}{25} + C$. Torej je $C = \frac{11}{25}$. Rešitev naloge je $y = \frac{1}{5}(x+3)e^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x} + \frac{11}{25}$.

(c) Ker je $\int dy = \int x\cos(3x)dx$, bomo $\int x\cos(3x)dx$ izračunali s pomočjo perpartesa. Uvedemo $u = x$, $dv = \cos(3x)$ in zato $du = dx$, $v = \frac{1}{3}\sin(3x)$. Torej je $\int x\cos(3x)dx = \frac{1}{3}x\sin(3x) - \int \frac{1}{3}\sin(3x)dx = \frac{1}{3}x\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C$. Splošna rešitev diferencialne enačbe je $y = \frac{1}{3}x\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C$. Ker je dan pogoj $y(\frac{\pi}{3}) = 0$, je $0 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{3}\sin(\pi) + \frac{1}{9}\cos(\pi) + C$ oziroma $0 = -\frac{1}{9} + C$. Iz tega sledi, da je $C = \frac{1}{9}$. Rešitev naloge je $y = \frac{1}{3}x\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + \frac{1}{9}$.

(d) $(2x^2+1)y' - 10xy = 4x$, $(2x^2+1)\frac{dy}{dx} = 4x + 10xy$. Velja $\frac{dy}{dx} = \frac{2x(2+5y}{2x^2+1}$ in $\int \frac{dy}{2+5y} = \int \frac{2x}{2x^2+1}dx$. Uvedemo novo neznanko $t = 2+5y$ in je $dt = 5dy$ in $h = 2x^2+1$ in $dh = 4xdx$. Tako je $\int \frac{dt}{5t} = \int \frac{dh}{2h}$. Velja $\frac{1}{5}\ln t = \frac{1}{2}\ln h + \ln C$ in $(2+5y)^{\frac{1}{5}} = C(2x^2+1)^{\frac{1}{2}}$.

3. Poiščite splošne rešitve linearnih diferencialnih enačb prvega reda:

(a) $y' + 2\frac{y}{x} = x^3$

(b) $y' + xy = xe^{\frac{x^2}{2}}$

(c) $y' + y + 2x = 0$

(d) $y' + y = 2x^2 + 3$

(e) $(y' + y)(1 + e^x) = 2$

(f) $(4 - x^2)y' + xy = 2x$

(g) $3xy' + y = 6x^3$

(h) $2y' + y = e^x$

(i) $xy' + 2(1 - x^2)y = 1$

(j) $y' + y\tan x = \frac{1}{\cos x}$

(k) $xy' + y = x^2 \ln x$

(l) $xy' + xy = 1 - y$

(m) $x^2y' + xy + 1 = 0$

(n) $y' - \frac{2x+1}{x^2+x}y = \frac{2x+1}{x^2+x}$

(o) $xy' + y = \ln x + 1$

(p) $y' + 2xy = e^{-x^2}$

(q) $xy' + 2y = x^3$

Rešitev.
Linerana diferencialna enačba prvega reda je oblike $y' + f(x)y = g(x)$.

(a) $y' + 2\frac{y}{x} = x^3$

Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned}
y' + 2\frac{y}{x} &= 0 \\
y' &= -2\frac{y}{x} \\
\frac{dy}{y} &= -2\frac{dx}{x} \\
\int \frac{dy}{y} &= -2\int \frac{dx}{x} \\
\ln y &= -2\ln x + \ln C \\
\ln y &= \ln x^{-2} + \ln C \\
\ln y &= \ln Cx^{-2} \\
y &= Cx^{-2}.
\end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $y = C(x)x^{-2}$. Torej je

$$C'(x)x^{-2} - 2C(x)x^{-3} + 2\frac{C(x)x^{-2}}{x} = x^3.$$

Iz tega sledi

$$C'(x) = x^5$$

in zato

$$C(x) = \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + D.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $y = (\frac{x^6}{6} + D)x^{-2}$.

(b) $y' + xy = xe^{\frac{x^2}{2}}$

Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned}
y' + xy &= 0 \\
y' &= -xy \\
\frac{dy}{y} &= -xdx \\
\int \frac{dy}{y} &= -\int xdx \\
\ln y &= -\frac{x^2}{2} + \ln C \\
\ln y &= \ln e^{-\frac{x^2}{2}} + \ln C \\
\ln y &= \ln Ce^{-\frac{x^2}{2}} \\
y &= Ce^{-\frac{x^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $y = C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Torej je

$$C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} - C(x)xe^{-\frac{x^2}{2}} + C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}x = xe^{\frac{x^2}{2}}.$$

Iz tega sledi

$$C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = xe^{\frac{x^2}{2}}$$

$$C'(x) = xe^{x^2}, \quad \int C'(x) = \int xe^{x^2} dx.$$

Po uvedbi nove neznanke $t = x^2$ dobimo

$$C(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + D.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $y = (\frac{1}{2}e^{x^2} + D)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

(c) $y' + y + 2x = 0$

Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned} y' + y &= 0 \\ y' &= -y \\ \frac{dy}{y} &= -dx \\ \int \frac{dy}{y} &= -\int dx \\ \ln y &= -x + \ln C \\ \ln y &= \ln e^{-x} + \ln C \\ \ln y &= \ln Ce^{-x} \\ y &= Ce^{-x}. \end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $y = C(x)e^{-x}$. Torej je

$$C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = -2x.$$

Iz tega sledi

$$C'(x)e^{-x} = -2x, \quad \int C'(x) = -2\int xe^{x}dx.$$

Izračunajmo sedaj integral $\int xe^x$ s pomočjo perpartesa. Z uvedbo $u = x$ in $e^x dx = dv$ dobimo

$$C(x) = -2xe^x + 2e^x + D.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $y = (-2xe^x + 2e^x + D)e^{-x}$.

(d) $y' + y = 2x^2 + 3$

Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned}
y' + y &= 0 \\
y' &= -y \\
\frac{dy}{y} &= -dx \\
\int \frac{dy}{y} &= -\int dx \\
\ln y &= -x + \ln C \\
\ln y &= \ln e^{-x} + \ln C \\
\ln y &= \ln Ce^{-x} \\
y &= Ce^{-x}.
\end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $y = C(x)e^{-x}$. Torej je

$$C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} \;=\; 2x^2 + 3.$$

Iz tega sledi

$$C'(x)e^{-x} = 2x^2 + 3, \qquad \int C'(x) = -2\int (2x^2 + 3)e^x dx.$$

Izračunajmo sedaj integral $\int(2x^2 + 3)e^x$ s pomočjo perpartesa. Z uvedbo $u = 2x^2 + 3$ in $e^x dx = dv$ dobimo

$$C(x) = (2x^2 + 3)e^x - 4\int xe^x dx + D.$$

S ponovno uporabo perpartesa dobimo

$$C(x) = (2x^2 + 3)e^x - 4xe^x + 4e^x + D.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je

$$y = ((2x^2 + 3)e^x - 4xe^x + 4e^x + D)e^{-x}.$$

(e) $(y' + y)(1 + e^x) = 2$

Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned} y' + y &= 0 \\ y' &= -y \\ \frac{dy}{y} &= -dx \\ \int \frac{dy}{y} &= -\int dx \\ \ln y &= -x + \ln C \\ \ln y &= \ln e^{-x} + \ln C \\ \ln y &= \ln Ce^{-x} \\ y &= Ce^{-x}. \end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $y = C(x)e^{-x}$. Torej je

$$C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x} + C(x)e^{-x} = \frac{2}{1+e^x}.$$

Iz tega sledi

$$C'(x)e^{-x} = \frac{2}{1+e^x}, \quad C'(x) = \frac{2e^x}{1+e^x}.$$

Z uvedbo nove neznanke $t = 1 + e^x$ dobimo

$$C(x) = \ln(1 + e^x)^2 + D.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $y = (\ln(1 + e^x)^2 + D)e^{-x}$.

(f) $(4-x^2)y' + xy = 2x$

Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned}
y' + (\frac{x}{4-x^2})y &= 0 \\
y' &= -(\frac{x}{4-x^2})y \\
\frac{dy}{y} &= -\frac{x}{4-x^2}dx \\
\int \frac{dy}{y} &= -\int \frac{x}{4-x^2}dx \\
4-x^2 &= t, \quad -2xdx = dt \\
\int \frac{dy}{y} &= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} \\
\ln y &= \frac{1}{2}\ln(4-x^2) + \ln C \\
\ln y &= \ln{(4-x^2)}^{\frac{1}{2}} + \ln C \\
\ln y &= \ln C(4-x^2)^{\frac{1}{2}} \\
y &= C(4-x^2)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $y = C(x)(4-x^2)^{\frac{1}{2}}$. Torej je

$$C'(x)(4-x^2)^{\frac{1}{2}} + C(x)\frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) + C(x)x{(4-x^2)}^{-\frac{1}{2}} = \frac{2x}{(4-x^2)}.$$

Iz tega sledi

$$C'(x)(4-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2x}{(4-x^2)}, \quad C'(x) = 2x(4-x^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Z uvedbo nove neznanke $t = 4-x^2$ dobimo

$$C(x) = 2(4-x^2)^{-\frac{1}{2}} + D.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $y = (2(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}+D)(4-x^2)^{\frac{1}{2}}$.

(g) $3xy' + y = 6x^3$

Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned}
y' + (\frac{y}{3x}) &= 0 \\
y' &= -\frac{y}{3x} \\
\frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{3x} \\
\int \frac{dy}{y} &= -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x} \\
\ln y &= -\frac{1}{3}\ln x + \ln C \\
\ln y &= \ln x^{-\frac{1}{3}} + \ln C \\
\ln y &= \ln Cx^{-\frac{1}{3}} \\
y &= Cx^{-\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $y = C(x)x^{-\frac{1}{3}}$. Torej je

$$C'(x)x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}C(x)x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{3}C(x)x^{\frac{4}{3}} = 2x^2.$$

Iz tega sledi

$$C'(x)x^{-\frac{1}{3}} = 2x^2, \quad C'(x) = 2x^{\frac{7}{3}}$$

in zato

$$C(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{10}{3}} + D.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $y = (\frac{3}{5}x^{\frac{10}{3}} + D)x^{-\frac{1}{3}}$.

(h) $2y' + y = e^x$

Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned}
y' + (\frac{y}{2}) &= 0 \\
y' &= -\frac{y}{2} \\
\frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{2} \\
\int \frac{dy}{y} &= -\frac{1}{2}\int dx \\
\ln y &= -\frac{1}{2}x + \ln C \\
\ln y &= \ln e^{-\frac{1}{2}x} + \ln C \\
\ln y &= \ln Ce^{-\frac{1}{2}x} \\
y &= Ce^{-\frac{1}{2}x}.
\end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $y = C(x)e^{-\frac{1}{2}x}$. Torej je

$$C'(x)e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}C(x)e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}C(x)e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{e^x}{2}.$$

Iz tega sledi

$$C'(x)e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{e^x}{2}, \quad C'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{3x}{2}}$$

in zato

$$C(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{3x}{2}} + D.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $y = (\frac{1}{3}e^{\frac{3x}{2}} + D)e^{-\frac{1}{2}x}$.

(i) $xy' + 2(1-x^2)y = 1$

Enačbo preoblikujemo in dobimo $y' + \frac{2(1-x^2)}{x}y = \frac{1}{x}$.

Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned}
y' + \frac{2(1-x^2)}{x}y &= 0 \\
y' &= -\frac{2(1-x^2)}{x}y \\
\frac{dy}{y} &= \frac{(-2+2x^2)dx}{x} \\
\int \frac{dy}{y} &= \int -2\frac{1}{x}dx + \int 2xdx \\
\ln y &= -2\ln x + x^2 + \ln C \\
\ln y &= \ln x^{-2} + \ln e^{x^2} + \ln C \\
\ln y &= \ln Cx^{-2}e^{x^2} \\
y &= Cx^{-2}e^{x^2}.
\end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $y = C(x)x^{-2}e^{x^2}$. Torej je

$$C'(x)x^{-2}e^{x^2} + C(x)(e^{x^2 2xx^{-2}} + e^{x^2}(-2x^{-3})) + \frac{2(1-x^2)}{x}(C(x)x^{-2}e^{x^2}) \;=\; \frac{1}{x}.$$

Iz tega sledi

$$C'(x)x^{-2}e^{x^2} = \frac{1}{x}, \quad C'(x) = xe^{-x^2}$$

in zato

$$C(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + D.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $y = (-\frac{1}{2}e^{-x^2} + D)x^{-2}e^{x^2}$.

(j) $y' + y\tan x = \frac{1}{\cos x}$

Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned}
y' + y\tan x &= 0 \\
y' &= -y\tan x \\
\frac{dy}{y} &= -\tan x \\
\int \frac{dy}{y} &= -\int \tan x dx \\
\ln y &= -(-\ln(\cos x)) + \ln C \\
\ln y &= \ln(\cos x) + \ln C \\
y &= C\cos x.
\end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $y = C(x)\cos x$. Torej je

$$C'(x)\cos x - \sin x C(x) + C(x)\cos x \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

Iz tega sledi

$$C'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x}, \quad C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

in zato

$$C(x) = \tan x + D.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $y = (\tan x + D)\cos x$.

(k) $xy' + y = x^2 \ln x$

Enačbo preoblikujemo in dobimo $y' + \frac{y}{x} = x \ln x$.

Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned} y' + \frac{y}{x} &= 0 \\ y' &= -\frac{y}{x} \\ \frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{x} \\ \int \frac{dy}{y} &= -\int \frac{dx}{x} \\ \ln y &= -\ln x + \ln C \\ \ln y &= \ln \frac{C}{x} \\ y &= \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $y = \frac{C(x)}{x}$. Torej je

$$\frac{C'(x)}{x} - C(x)x^{-2} + C(x)x^{-2} = x \ln x.$$

Iz tega sledi

$$\frac{C'(x)}{x} = x \ln x, \quad C'(x) = x^2 \ln x$$

in zato

$$C(x) = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + D.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $y = (\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + D)\frac{1}{x}$.

(l) $xy' + xy = 1 - y$

Enačbo preoblikujemo in dobimo $y' + \frac{x+1}{x} y = \frac{1}{x}$.

Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned}
y' + \frac{x+1}{x} y &= 0 \\
y' &= -\frac{x+1}{x} y \\
\frac{dy}{y} &= -\frac{x+1}{x} dx \\
\int \frac{dy}{y} &= -\int \frac{x+1}{x} dx \\
\ln y &= -(\int dx + \int \frac{1}{x} dx) + \ln C \\
\ln y &= -x - \ln x + \ln C \\
y &= C \frac{e^{-x}}{x}.
\end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $y = C(x)\frac{e^{-x}}{x}$. Torej je

$$C'(x)\frac{e^{-x}}{x} - C(x)\frac{1}{xe^x} - C(x)\frac{1}{x^2e^x} + C(x)\frac{1}{xe^x}\frac{x+1}{x} = \frac{1}{x}.$$

Iz tega sledi

$$C'(x)\frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{x}, \quad C'(x) = e^x$$

in zato

$$C(x) = e^x + D.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $y = (e^x + D)\frac{e^{-x}}{x}$.

(m) $x^2y' + xy + 1 = 0$

Po ureditvi dobimo $y' + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$ Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned} y' + \frac{y}{x} &= 0 \\ y' &= -\frac{y}{x} \\ \frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{x} \\ \int \frac{dy}{y} &= -\int \frac{dx}{x} \\ \ln y &= -\ln x + \ln C \\ \ln y &= \ln \frac{C}{x} \\ y &= \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $y = \frac{C(x)}{x}$. Torej je

$$\frac{C'(x)}{x} + C(x)(-x^{-2}) + \frac{C(x)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Iz tega sledi

$$\frac{C'(x)}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

in zato

$$C(x) = -\ln x + D.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $y = (-\ln x + D)\frac{1}{x}$.

(n) $y' - \frac{2x+1}{x^2+x}y = \frac{2x+1}{x^2+x}$

Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned}
y' - \frac{2x+1}{x^2+x}y &= 0 \\
y' &= \frac{2x+1}{x^2+x}y \\
\frac{dy}{y} &= \frac{2x+1}{x^2+x}dx \\
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{2x+1}{x^2+x}dx \\
x^2+x=t, & \quad (2x+1)dx = dt, \\
\ln y &= \int \frac{2x+1}{t}\frac{dt}{2x+1} \\
\ln y &= \ln t + \ln C \\
\ln y &= \ln(x^2+x)C \\
y &= (x^2+x)C.
\end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom

$$y = C(x)(x^2+x).$$

Torej je

$$C'(x)(x^2+x) + C(x)(2x+1) - \frac{C(x)(2x+1)(x^2+x)}{x^2+x} = \frac{2x+1}{x^2+x}.$$

Iz tega sledi

$$C'(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x)^2}, \quad x^2+x=t, \quad (2x+1)dx = dt,$$

in zato

$$C(x) = \int \frac{1}{t^2}dt, \quad C(x) = -\frac{1}{x^2+x} + D$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $y = (-\frac{1}{x^2+x} + D)(x^2+x)$.

(o) $xy' + y = \ln x + 1$

Enačbo preoblikujemo in dobimo $y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x+1}{x}$.

Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned} y' + \frac{y}{x} &= 0 \\ y' &= -\frac{y}{x} \\ \frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{x} \\ \int \frac{dy}{y} &= -\int \frac{dx}{x} \\ \ln y &= -\ln x + \ln C \\ \ln y &= \ln \frac{C}{x} \\ y &= \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $y = \frac{C(x)}{x}$. Torej je

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = \frac{\ln x + 1}{x}.$$

Iz tega sledi

$$C'(x) = \ln x + 1$$

in zato

$$C(x) = \int \ln x dx + \int dx, \quad C(x) = x \ln x + D.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $y = \frac{x \ln x+D}{x}$.

(p) $y' + 2xy = e^{-x^2}$

Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned} y' + 2xy &= 0 \\ y' &= -2xy \\ \frac{dy}{y} &= -2xdx \\ \int \frac{dy}{y} &= -2\int xdx \\ \ln y &= -x^2 + \ln C \\ \ln y &= \ln e^{-x^2} \\ y &= Ce^{-x^2}. \end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $y = C(x)e^{-x^2}$. Torej je

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = e^{-x^2}.$$

Iz tega sledi

$$C'(x) = 1$$

in zato

$$C(x) = x + D.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $y = (x + D)e^{-x^2}$.

(q) $xy' + 2y = x^3$

Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned} y' + \frac{2y}{x} &= 0 \\ y' &= -\frac{2y}{x} \\ \frac{dy}{y} &= \frac{-2dx}{x} \\ \int \frac{dy}{y} &= -2\int \frac{dx}{x} \\ \ln y &= -2\ln x + \ln C \\ \ln y &= \ln x^{-2} + \ln C \\ y &= Cx^{-2}. \end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $y = C(x)x^{-2}$. Torej je

$$C'(x)x^{-2} - 2x^{-3}C(x) + 2x^{-3}C(x) = x^2.$$

Iz tega sledi

$$C'(x) = x^4$$

in zato

$$C(x) = \frac{x^5}{5} + D.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $y = (\frac{x^5}{5} + D)x^{-2}$.

4. Poiščite splošne rešitve Bernoullijevih diferencialnih enačb:

(a) $y' + y = y^2$

(b) $xy' + y = -xy^2$

(c) $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{2y}$

(d) $y' + xy = x\sqrt{y}$

(e) $y' + y = xy^{\frac{2}{3}}$

(f) $2y' + \frac{3y}{x\ln x} = 3y^{\frac{1}{3}}$

(g) $\frac{1}{2}xy' + y + x^2y^4 = 0$

(h) $xdy = (x^2y + x^2y^3)dx$

Rešitev.

Bernoullijeva diferencialna enačba je oblike $y' + f(x)y = g(x)y^n$

(a) $y' + y = y^2$

Uvedemo novo neznanko $z = y^{1-n}$.
Iz podane enačbe je razvidno, da je $n = 2$.
Nova neznanka je enaka $z = y^{-1}$.
Odvajajmo neznanko z kot funkcijo: $z' = -1y^{-2}y'$.
Prvotno enačbo delimo z y^2 in dobimo $\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = 1$.
Zamanjava z novo neznanko nam da $-z' + z = 1$.

Dobljena diferencialna enačba je linearna diferencialna enačba prvega reda. Po preoblikovanju je linearna diferencialna enačba enaka: $z' - z = -1$.

Rešitev homogenega dela linearne diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned}
z' - z &= 0 \\
z' &= z \\
\frac{dz}{z} &= 1dx \\
\int \frac{dz}{z} &= \int 1dx \\
\ln z &= x + \ln C \\
\ln z &= \ln Ce^x \\
z &= Ce^x.
\end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $y = C(x)e^x$. Torej je

$$C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = -1.$$

Iz tega sledi

$$C'(x) = -e^{-x}$$

$$-x = t, \quad dx = -dt$$

in zato

$$C(x) = e^t + D$$

oziroma

$$C(x) = e^{-x} + D$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $z_s = (e^{-x} + D)e^x$

Sedaj upoštevajmo še uvedbo nove neznanke $z = \frac{1}{y}$.

Končna rešitev je tako $y = \frac{1}{(e^{-x}+D)e^x}$.

(b) $xy' + y = -xy^2$

Enačbo preoblikujemo $y' + \frac{y}{x} = -y^2$.

Uvedemo novo neznanko $z = y^{1-n}$.
Iz podane enačbe je razvidno, da je $n = 2$.

Nova neznanka je enaka $z = y^{-1}$ oziroma $z = \frac{1}{y}$.
Odvajajmo neznanko z kot funkcijo: $z' = -1y^{-2}y'$.

Prvotno enačbo delimo z y^2 in dobimo $\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = -1$.
Po zamanjavi z novo neznanko dobimo $-z' + \frac{1}{x}z = -1$.

Dobljena diferencialna enačba je linearna diferencialna enačba prvega reda. Po preoblikovanju je linearna diferencialna enačba enaka $z' - \frac{1}{x}z = 1$.

Rešitev homogenega dela linearna diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned}
z' - \frac{1}{x}z &= 0\\
z' &= \frac{z}{x}\\
\frac{dz}{z} &= \frac{dx}{x}\\
\int \frac{dz}{z} &= \int \frac{dx}{x}\\
\ln z &= \ln x + \ln C\\
\ln z &= \ln Cx\\
z &= Cx.
\end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $y = C(x)x$. Torej je

$$C'(x)x + C(x) - \frac{C(x)x}{x} = 1.$$

Iz tega sledi

$$C'(x) = \frac{1}{x}$$

in zato

$$C(x) = \ln x + D.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $z_s = (\ln x + D)x$.

Sedaj upoštevajmo še uvedbo nove neznanke $z = \frac{1}{y}$.

Končna rešitev je tako $y = \frac{1}{((\ln x+D)x}$.

(c) $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{2y}$

Enačbo preoblikujemo $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{2}y^{-1}$.

Uvedemo novo neznanko $z = y^{1-n}$.
Iz podane enačbe je razvidno, da je $n = -1$.
Nova neznanka je enaka $z = y^2$.
Odvajajmo neznanko z kot funkcijo: $z' = 2yy'$.

Prvotno enačbo delimo z y^{-1} in dobimo $\frac{y'}{y^{-1}} - \frac{y^2}{x} = \frac{1}{2}$.
Po zamenjavi z novo neznanko dobimo $\frac{1}{2}z' - \frac{z}{x} = \frac{1}{2}$
Dobljena diferencialna enačba je linearna diferencialna enačba prvega reda. Po preoblikovanju je linearna diferencialne enačba enaka $z' - \frac{2}{x}z = 1$.

Rešitev homogenega dela linearna diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned} z' - \frac{2}{x}z &= 0 \\ z' &= \frac{2z}{x} \\ \frac{dz}{z} &= 2\frac{dx}{x} \\ \int \frac{dz}{z} &= 2\int \frac{dx}{x} \\ \ln z &= 2\ln x + \ln C \\ \ln z &= \ln Cx^2 \\ z &= Cx^2. \end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $y = C(x)x^2$. Torej je

$$C'(x)x^2 + 2C(x) - \frac{2C(x)x^2}{x} = 1.$$

Iz tega sledi

$$C'(x) = \frac{1}{x^2}$$

in zato

$$C(x) = -\frac{1}{x} + D.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $z_s = (-\frac{1}{x} + D)x^2$

Sedaj upoštevajmo še uvedbo nove neznanke $z = y^2$.

Končna rešitev je tako $y = \sqrt{(-\frac{1}{x} + D)x^2}$.

(d) $y' + xy = x\sqrt{y}$

Enačbo preoblikujemo $y' + xy = xy^{\frac{1}{2}}$.

Uvedemo novo neznanko $z = y^{1-n}$.
Iz podane enačbe je razvidno, da je $n = \frac{1}{2}$.
Nova neznanka je enaka $z = y^{\frac{1}{2}}$.
Odvajajmo neznanko z kot funkcijo: $z' = \frac{1}{2}\frac{y'}{y^{\frac{1}{2}}}$.

Prvotno enačbo delimo z $y^{\frac{1}{2}}$ in dobimo $\frac{y'}{y^{\frac{1}{2}}} + x\frac{y}{y^{\frac{1}{2}}} = x$.
Po zamenjavi z novo neznanko dobimo $2z' + xz = x$.
Dobljena diferencialna enačba je linearna diferencialna enačba prvega reda. Po preoblikovanju je linearna diferencialna enačba enaka $z' + \frac{x}{2}z = \frac{x}{2}$.

Rešitev homogenega dela linearna diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned}
z' + \frac{x}{2}z &= 0 \\
z' &= -\frac{xz}{2} \\
\frac{dz}{z} &= -\frac{xdx}{2} \\
\int \frac{dz}{z} &= -\frac{1}{2}\int xdx \\
\ln z &= -\frac{x^2}{4} + \ln C \\
\ln z &= \ln Ce^{-\frac{x^2}{4}} \\
z &= Ce^{-\frac{x^2}{4}}.
\end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $y = C(x)e^{-\frac{x^2}{4}}$.
Torej je

$$C'(x)e^{-\frac{x^2}{4}} + C(x)e^{-\frac{x^2}{4}}(-\frac{x}{2}) - C(x)e^{-\frac{x^2}{4}}(-\frac{x}{2}) \quad = \quad \frac{x}{2}.$$

Iz tega sledi

$$C'(x) = e^{\frac{x^2}{4}}(\frac{x}{2})$$

$$t = \frac{x^2}{4}, \quad dt = \frac{x}{2}dx$$

in zato

$$C(x) = \int e^t dt$$

in

$$C(x) = e^{\frac{x^2}{4}} + D.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $z_s = (e^{\frac{x^2}{4}} + D)e^{-\frac{x^2}{4}}$.

Sedaj upoštevajmo še uvedbo nove neznanke $z = y^{\frac{1}{2}}$.

Končna rešitev je tako $y = ((e^{\frac{x^2}{4}} + D)e^{-\frac{x^2}{4}})^2$.

(e) $y' + y = xy^{\frac{2}{3}}$

Uvedemo novo neznanko $z = y^{1-n}$.
Iz podane enačbe je razvidno, da je $n = \frac{2}{3}$.
Nova neznanka je enaka $z = y^{\frac{1}{3}}$.
Odvajajmo neznanko z kot funkcijo: $z' = \frac{1}{3}\frac{y'}{y^{\frac{2}{3}}}$.

Prvotno enačbo delimo z $y^{\frac{2}{3}}$ in dobimo $\frac{y'}{y^{\frac{2}{3}}} + \frac{y}{y^{\frac{2}{3}}} = x$.
Po zamenjavi z novo neznanko dobimo $3z' + z = x$
Dobljena diferencialna enačba je linearna diferencialna enačba prvega reda.

Po preoblikovanju je linearna diferencialna enačba enaka $z' + \frac{1}{3}z = \frac{x}{3}$.

Rešitev homogenega dela linearna diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned}
z' + \frac{1}{3}z &= 0\\
z' &= -\frac{z}{3}\\
\frac{dz}{z} &= -\frac{dx}{3}\\
\int \frac{dz}{z} &= -\frac{1}{3}\int dx\\
\ln z &= -\frac{1}{3}x + \ln C\\
\ln z &= \ln Ce^{-\frac{x}{3}}\\
z &= Ce^{-\frac{x}{3}}.
\end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $z = C(x)e^{-\frac{x}{3}}$. Torej je

$$C'(x)e^{-\frac{x}{3}} + C(x)e^{-\frac{x}{3}}(-\frac{1}{3}) + C(x)e^{-\frac{x}{3}}(\frac{1}{3}) \quad = \quad \frac{x}{3}.$$

Iz tega sledi

$$C'(x) = (\frac{x}{3})e^{\frac{x}{3}}.$$

Uporabimo metodo perpartes:

$$u = \frac{x}{3}, \quad dv = e^{\frac{x}{3}}dx$$

in zato

$$C(x) = xe^{\frac{x}{3}} - \int e^{\frac{x}{3}}dx$$

ter

$$C(x) = xe^{\frac{x}{3}} - 3e^{\frac{x}{3}} + D.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $z_s = (xe^{\frac{x}{3}} - 3e^{\frac{x}{3}} + D)e^{-\frac{x}{3}}$.

Sedaj upoštevajmo še uvedbo nove neznanke $z = y^{\frac{1}{3}}$.

Splošna rešitev je tako $y = (x - 3 + De^{-\frac{x}{3}})^3$.

(f) $2y' + \frac{3y}{x\ln x} = 3y^{\frac{1}{3}}$

Enačbo preoblikujemo $y' + \frac{3y}{2x\ln x} = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$.

Uvedemo novo neznanko $z = y^{1-n}$.
Iz podane enačbe je razvidno, da je $n = \frac{1}{3}$.
Nova neznanka je enaka $z = y^{\frac{2}{3}}$.
Odvajajmo neznanko z kot funkcijo: $z' = \frac{2}{3}\frac{y'}{y^{\frac{1}{3}}}$.

Prvotno enačbo delimo z $y^{\frac{1}{3}}$ in dobimo $\frac{y'}{y^{\frac{1}{3}}} + \frac{3y^{\frac{2}{3}}}{2x\ln x} = \frac{3}{2}$.
Po zamenjavi z novo neznanko dobimo $\frac{3}{2}z' + \frac{3z}{2x\ln x} = \frac{3}{2}$.
Dobljena diferencialna enačba je linearna diferencialna enačba prvega reda.

Po preoblikovanju je linearna diferencialna enačba enaka

$$z' + \frac{z}{2x\ln x} = 1.$$

Rešitev homogenega dela linearna diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned}
z' + \frac{z}{2x\ln x} &= 0\\
z' &= -\frac{z}{2x\ln x}\\
\frac{dz}{z} &= -\frac{dx}{2x\ln x}\\
\int\frac{dz}{z} &= -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x\ln x}\\
t = \ln x, &\quad \frac{dx}{x} = dt\\
\ln z &= -\frac{1}{2}\ln t + \ln C\\
\ln z &= \ln C(\ln x)^{-\frac{1}{2}}\\
z &= C(\ln x)^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $y = C(x)(\ln x)^{-\frac{1}{2}}$.
Torej je

$$C'(x)(\ln x)^{-\frac{1}{2}} + C(x)(-\frac{1}{2x})((\ln x)^{-\frac{3}{2}}) - C(x)(-\frac{1}{2x})((\ln x)^{-\frac{3}{2}}) \;=\; 1.$$

Iz tega sledi

$$C'(x) = (\ln x)^{\frac{1}{2}}$$

Uporabimo metodo perpartes:

$$u = (\ln x)^{\frac{1}{2}}, \quad 1dx = dv.$$

in zato

$$C(x) = x(\ln x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\int \ln x dx$$

ter

$$C(x) = x(\ln x)^{\frac{1}{2}} - \frac{x\ln x}{2} + \frac{x}{2} + D.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $z_s = (x(\ln x)^{\frac{1}{2}} - \frac{x\ln x}{2} + \frac{x}{2} + D)(\ln x)^{-\frac{1}{2}}$.

Sedaj upoštevajmo še uvedbo nove neznanke $z = y^{\frac{2}{3}}$.

Splošna rešitev je tako $y = ((x(\ln x)^{\frac{1}{2}} - \frac{x\ln x}{2} + \frac{x}{2} + D)(\ln x)^{-\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}$.

(g) $\frac{1}{2}xy' + y + x^2y^4 = 0$

Enačbo preoblikujemo $y' + \frac{2y}{x} = -2xy^4$.

Uvedemo novo neznanko $z = y^{1-n}$.
Iz podane enačbe je razvidno, da je $n = 4$. Nova neznanka je enaka $z = y^{-3}$.
Odvajajmo neznanko z kot funkcijo: $z' = -\frac{3y'}{y^4}$.

Prvotno enačbo delimo z y^4 in dobimo $\frac{y'}{y^4} + \frac{2}{xy^3} = -2x$.
Po zamenjavi z novo neznanko dobimo $-\frac{1}{3}z' + \frac{2}{x}z = -2x$
Dobljena diferencialna enačba je linearna diferencialna enačba prvega reda.

Po preoblikovanju je linearna diferencialna enačba enaka $z' + -\frac{6}{x}z = 6x$.

Rešitev homogenega dela linearna diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned} z' + -\frac{6}{x}z &= 0 \\ \frac{dz}{z} &= \frac{6}{x}dx \\ \int \frac{dz}{z} &= 6\int \frac{1}{x}dx \\ \ln z &= 6\ln x + \ln C \\ \ln z &= \ln Cx^6 \\ z &= Cx^6. \end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $y = C(x)x^6$. Torej je

$$C'(x)x^6 + C(x)6x^5 - C(x)6x^5 = 6x.$$

Iz tega sledi

$$C'(x) = \frac{6}{x^5}$$

in zato

$$C(x) = -\frac{3}{2x^4} + D.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $z_s = (-\frac{3}{2x^4} + D)x^6$

Sedaj upoštevajmo še uvedbo nove neznanke $z = y^{-3}$.

Splošna rešitev je tako $y = (\frac{1}{(-\frac{3}{2x^4}+D)x^6})^{\frac{1}{3}}$.

(h) $xdy = (x^2y + x^2y^3)dx$

Enačbo preoblikujemo $y' - xy = xy^3$.

Uvedemo novo neznanko $z = y^{1-n}$.
Iz podane enačbe je razvidno, da je $n = 3$. Nova neznanka je enaka $z = y^{-2}$.
Odvajajmo neznanko z kot funkcijo: $z' = -\frac{2y'}{y^3}$.

Prvotno enačbo delimo z y^3 in dobimo $\frac{y'}{y^3} - \frac{x}{y^2} = x$.

Po zamenjavi z novo neznanko dobimo $-\frac{1}{2}z' - xz = x$.
Dobljena diferencialna enačba je linearna diferencialna enačba prvega reda.

Po preoblikovanju je linearna diferencialna enačba enaka
$z' + 2xz = -2x$.

Rešitev homogenega dela linearna diferencialne enačbe je:

$$\begin{aligned} z' + 2xz &= 0 \\ \frac{dz}{z} &= -2xdx \\ \int \frac{dz}{z} &= -2\int xdx \\ \ln z &= -x^2 + \ln C \\ \ln z &= \ln Ce^{-x^2} \\ z &= Ce^{-x^2}. \end{aligned}$$

Splošno rešitev diferencialne enačbe rešimo z nastavkom $y = C(x)e^{-x^2}$.
Torej je

$$C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x) - C(x)e^{-x^2}(2x) = -2x.$$

Iz tega sledi

$$C'(x) = -2xe^{x^2}$$

$$t = x^2, \quad dt = 2xdx$$

$$\int C'(x) = -2\int xe^{x^2}dx$$

ter

$$\int C'(x) = -\int e^t dt$$

in zato

$$C(x) = -e^{x^2} + D.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je $z_s = (-e^{x^2} + D)e^{-x^2}$.

Sedaj upoštevajmo še uvedbo nove neznanke $z = y^{-2}$.

Splošna rešitev je tako $y = \sqrt{\frac{1}{((-e^{x^2}+D)e^{-x^2})}}$.

3.2 Diferencialne enačbe drugega reda

Linearne diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti so oblike

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x),$$

kjer so a_1, a_0 realna števila.

Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe dobimo s pomočjo karakterističnega polinoma. Namesto y'' in y' uporabimo λ^2 ter λ.
Karakteristični polinom je tako enak $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$.
Ničle karakterističnega polinoma nam bodo dale rešitev homogenega dela diferencialne enačbe.

Pomagamo si z naslednjimi nastavki:

- Ničli karakterističnega polinoma λ_1 in λ_2 sta različni realni števili:

$$y_H = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

- Ničla karakterističnega polinoma je realna in dvojna, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$:

$$y_H = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}.$$

- Ničli karakterističnega polinoma sta konjugirani kompleksni števili, $\lambda_1 = a + ib, \quad \lambda_2 = a - ib$:

$$y_H = e^{ax}(C_1 \cos(bx) + C_2 \sin(bx)).$$

Partikularno rešitev diferencialne enačbe poiščemo z nastavkom:

$f(x)$	nastavek
$Ce^{\alpha x}$	$Ax^s e^{\alpha x}$
$p_n(x)e^{\alpha x}$	$P_n(x)x^s e^{\alpha x}$
$x^2 e^x$	$(Ax^2 + Bx + C)x^s e^x$
$C\sin(\beta x)$	$x^s(A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x))$
$C\cos(\beta x)$	$x^s(A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x))$
$p_n(x)(C\sin(\beta x) + D\cos(\beta x))$	$x^s(P_n(x)\sin(\beta x) + Q_n(x)\cos(\beta x))$
$p_n(x)e^{\alpha x}(C\sin(\beta x) + D\cos(\beta x))$	$x^s(P_n(x)\sin(\beta x) + Q_n(x)\cos(\beta x))e^{\alpha x}$

$s = 0$, če α oziroma $\alpha + i\beta$ **ni** ničla karakterističnega polinoma.

$s = 1$, če α oziroma $\alpha + i\beta$ **je** ničla karakterističnega polinoma.

$s = 2$, če je α **dvojna** ničla karakterističnega polinoma.

1. Poiščite splošne rešitve diferencialnih enačb drugega s konstantnimi koeficienti:

   (a) $y'' + 4y = 8x^2$
   (b) $y'' + 2y' + y = (x + 1)e^{2x}$
   (c) $y'' + 4y' + y = e^{\frac{1}{2}x}$
   (d) $y'' + y' = x^2 + x$
   (e) $2y'' + y = e^x + x^2 e^x$
   (f) $y'' + 3y' - 10y = x^2 e^x$
   (g) $y'' + y' - 6y = e^{2x}\cos 2x$
   (h) $y'' + 2y' + 5y = 16e^x + \sin 2x$

Rešitev.

(a) $y'' + 4y = 8x^2$

Karakteristični polinom pripadajoče diferencialne enačbe je enak $\lambda^2 + 4 = 0$.
Ničli karakterističnega polinoma sta $\lambda_1 = 0 + 2i$ ter $\lambda_2 = 0 - 2i$.
Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je enaka

$$y_H = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x).$$

Poiščimo sedaj partikularno rešitev diferencialne enačbe.

Desni del enačbe predstavlja polinom druge stopnje $8x^2$.
Sedaj lahko uporabimo drugi nastavek v naši tabeli.
$p_n(x)e^{\alpha x} \quad P_n(x)x^s e^{\alpha x}$.

$p_n(x)e^{\alpha x} = 8x^2 e^{0x}$. Od tod sledi, da je $\alpha = 0$. Iz tabele velja, če α ni ničla karakterističnega polinoma potem je $s = 0$.
Nastavek je tako enak: $(Ax^2 + Bx + C)x^0 e^{0x}$ oziroma $(Ax^2 + Bx + C)$.

Poiščimo manjkajoče vrednosti A, B, C danega partikularnega nastavka.
Potrebujemo prvi in drugi odvod partikularnega nastavka. $y_p = Ax^2 + Bx + C, \quad y_p' = 2Ax + B, \quad y_p'' = 2A$.
Ker je $y'' + 4y = 8x^2$ velja enakost $2A + 4Ax^2 + 4Bx + 4C = 8x^2$.
Od tod sledi $4Ax^2 + 4Bx + 2A + 4C = 8x^2 + 0x + 0$.
Dele ob neznankah enačimo $4A = 8, \quad 4B = 0, \quad 2A + 4C = 0$.
Manjkajoče neznanke A, B, C so enake $A = 2, \quad B = 0, \quad C = -1$.

Partikularni del rešitve je enak $y_p = 2x^2 - 1$.

Končna, skupna rešitev je enaka $2x^2 - 1 + C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$.

(b) $y'' + 2y' + y = (x+1)e^{2x}$

Karakteristični polinom pripadajoče diferencialne enačbe je enak $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$.
Ničli karakterističnega polinoma sta $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.
Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je enaka

$$y_H = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

Poiščimo sedaj partikularno rešitev diferencialne enačbe.

Desni del enačbe predstavlja produkt polinom ter eksponentne funkcije $(x+1)e^{2x}$.
Sedaj uporabimo drugi nastavek v naši tabeli.
$p_n(x)e^{\alpha x}$ $\quad P_n(x)x^s e^{\alpha x}$.

$p_n(x)e^{\alpha x} = (x+1)e^{2x}$. Od tod sledi, da je $\alpha = 2$. Iz tabele velja, če α oziroma $\alpha + i\beta$ ni ničla karakterističnega polinoma potem je $s = 0$.
Nastavek je tako enak: $(Ax+B)x^0 e^{2x}$ oziroma $(Ax+B)e^{2x}$.

Poiščimo manjkajoče vrednosti A, B, C danega partikularnega nastavka.
Potrebujemo prvi in drugi odvod partikularnega nastavka.
$y_p = (Ax+B)e^{2x}$, $\;y_p' = Ae^{2x} + 2(Ax+B)e^{2x}$, $\;y_p'' = 4Ae^{2x} + 4(Ax+B)e^{2x}$.
Ker je $y'' + 2y' + y = (x+1)e^{2x}$ velja enakost $4Ae^{2x} + 4(Ax+B)e^{2x} + 2(Ae^{2x} + 2(Ax+B)e^{2x}) + (Ax+B)e^{2x} = (x+1)e^{2x}$.
Od tod sledi $(6A+9B)e^{2x} + (9A)xe^{2x} = e^{2x} + xe^{2x}$.
Dele ob neznankah enačimo $6A + 9B = 1$, $\;9A = 1$.
Manjkajoči neznanki A, B sta enaki $A = \frac{1}{9}$, $\;B = \frac{1}{27}$.

Partikularni del rešitve je enak $y_p = (\frac{1}{9}x + \frac{1}{27})e^{2x}$.

Končna, skupna rešitev je enaka $y_S = (\frac{1}{9}x + \frac{1}{27})e^{2x} + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

(c) $y'' + 4y' + y = e^{\frac{x}{2}}$

Karakteristični polinom pripadajoče diferencialne enačbe je enak $\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$.
Ničli karakterističnega polinoma sta $\lambda_1 = -2 + \sqrt{3}$, $\lambda_2 = -2 - \sqrt{3}$.
Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je enaka

$$y_H = C_1 e^{(-2+\sqrt{3})x} + C_2 e^{(-2-\sqrt{3})x}.$$

Poiščimo sedaj partikularno rešitev diferencialne enačbe.

Desni del enačbe predstavlja eksponentna funkcija $e^{\frac{x}{2}}$.
Sedaj uporabimo prvi nastavek v naši tabeli.
$Ce^{\alpha x}$ $\qquad Ax^s e^{\alpha x}$.

$Ce^{\alpha x} = 1e^{\frac{1}{2}x}$. Od tod sledi, da je $\alpha = \frac{1}{2}$. Iz tabele velja, če α oziroma $\alpha + i\beta$ ni ničla karakterističnega polinoma potem je $s = 0$.
Nastavek je tako enak: $Ax^0 e^{\frac{1}{2}x}$ oziroma $Ae^{\frac{1}{2}x}$.

Poiščimo manjkajoče vrednosti A, B, C danega partikularnega nastavka.
Potrebujemo prvi in drugi odvod partikularnega nastavka.
$y_p = Ae^{\frac{1}{2}x}$, $y_p' = \frac{1}{2}Ae^{\frac{1}{2}x}$, $y_p'' = \frac{1}{4}Ae^{\frac{1}{2}x}$.
Ker je $y''+4y'+y = e^{\frac{x}{2}}$ velja enakost $\frac{1}{4}Ae^{\frac{1}{2}x}+4(\frac{1}{2}Ae^{\frac{1}{2}x})+Ae^{\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x}$.
Od tod sledi $(\frac{13}{4}A)e^{\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x}$.
Dele ob neznankah enačimo $\frac{13}{4}A = 1$. Manjkajoča neznanka A je enaka $A = \frac{4}{13}$.

Partikularni del rešitve je enak $y_p = \frac{4}{13}e^{\frac{1}{2}x}$.

Končna, skupna rešitev je enaka $y_S = \frac{4}{13}e^{\frac{1}{2}x}+C_1e^{(-2+\sqrt{3})x}+C_2e^{(-2-\sqrt{3})x}$.

(d) $y'' + y' = x^2 + x$

Karakteristični polinom pripadajoče diferencialne enačbe je enak $\lambda^2 + \lambda = 0$.
Ničli karakterističnega polinoma sta $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$.
Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je enaka

$$y_H = C_1 + C_2 e^{-x}.$$

Poiščimo sedaj partikularno rešitev diferencialne enačbe.

Desni del enačbe predstavlja polinom druge stopnje $x^2 + x$.
Sedaj uporabimo drugi nastavek v naši tabeli.
$p_n(x)e^{\alpha x} \quad P_n(x)x^s e^{\alpha x}$.

$p_n(x)e^{\alpha x} = (x^2 + x)e^{0x}$. Od tod sledi, da je $\alpha = 0$. Iz tabele velja, če je α oziroma $\alpha + i\beta$ ničla karakterističnega polinoma potem je $s = 1$.
Nastavek je tako enak: $(Ax^2 + Bx + C)x^1 e^{0x}$ oziroma $(Ax^2 + Bx + C)x$.

Poiščimo manjkajoče vrednosti A, B, C danega partikularnega nastavka.
Potrebujemo prvi in drugi odvod partikularnega nastavka. $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx$, $y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C$, $y_p'' = 6Ax + 2B$.
Ker je $y'' + y' = x^2 + x$ velja enakost $6Ax + 2B + 3Ax^2 + 2Bx + C = x^2 + x$.
Od tod sledi $3Ax^2 + (6A + 2B)x + 2B + C = 1x^2 + 1x + 0$.
Dele ob neznankah enačimo $3A = 1$, $6A + 2B = 1$, $2B + C = 0$.
Manjkajoče neznanke A, B, C so enake $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = 1$.

Partikularni del rešitve je enak $y_p = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$.

Končna, skupna rešitev je enaka $y_S = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + C_1 + C_2 e^{-x}$.

(e) $2y'' + y = e^x + x^2e^x$

Karakteristični polinom pripadajoče diferencialne enačbe je enak $2\lambda^2 + 1 = 0$.
Ničli karakterističnega polinoma sta $\lambda_1 = 0 + i\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\lambda_2 = 0 - i\sqrt{\frac{1}{2}}$.
Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je enaka

$$y_H = (C_1 \cos(\sqrt{\frac{1}{2}}x) + C_2 \sin(\sqrt{\frac{1}{2}}x)).$$

Poiščimo sedaj partikularno rešitev diferencialne enačbe.
Desni del enačbe predstavlja po preoblikovanju produkt polinoma druge stopnje z eksponentno funkcijo $e^x(1 + x^2)$.
Sedaj uporabimo drugi nastavek v naši tabeli.
$p_n(x)e^{\alpha x} \quad P_n(x)x^s e^{\alpha x}$.
$p_n(x)e^{\alpha x} = (x^2 + 1)e^{1x}$. Od tod sledi, da je $\alpha = 1$. Iz tabele velja, če α oziroma $\alpha + i\beta$ ni ničla karakterističnega polinoma potem je $s = 0$.
Nastavek je tako enak: $(Ax^2 + Bx + C)x^0e^{1x}$ oziroma $(Ax^2 + Bx + C)e^x$.

Poiščimo manjkajoče vrednosti A, B, C danega partikularnega nastavka.
Potrebujemo prvi in drugi odvod partikularnega nastavka. $y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^x$, $y_p' = (Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C)e^x$, $y_p'' = (Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B + C)e^x$.
Ker je $2y'' + y = e^x + x^2e^x$ velja enakost $2((Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B + C)e^x) + (Ax^2 + Bx + C)e^x = e^x + x^2e^x$.
Od tod sledi $(3A)x^2e^x + (8A+3B)xe^x + (4A+4B+3C)e^x = x^2e^x + e^x$.
Dele ob neznankah enačimo $3A = 1$, $(8A + 3B) = 0$, $(4A + 4B + 3C) = 1$. Manjkajoče neznanke A, B, C so enake $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{8}{9}$, $C = \frac{29}{27}$.
Partikularni del rešitve je enak $y_p = (\frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{29}{27})e^x$.

Končna, skupna rešitev je enaka $y_S = (\frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{29}{27})e^x + C_1e^{-x} + (C_1 \cos(\sqrt{\frac{1}{2}}x) + C_2 \sin(\sqrt{\frac{1}{2}}x))$.

(f) $y'' + y' - 6y = e^{2x}\cos 2x$

Karakteristični polinom pripadajoče diferencialne enačbe je enak $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$.
Ničli karakterističnega polinoma sta $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$.
Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je enaka

$$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Poiščimo sedaj partikularno rešitev diferencialne enačbe.

Desni del enačbe predstavlja produkt eksponentne funkcije s kosinusno funkcijo $e^{2x}\cos 2x$.
Sedaj uporabimo peti nastavek v naši tabeli.
$Ce^{\alpha x}\cos(\beta x) \qquad x^s e^{\alpha x}(A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x))$.
$Ce^{\alpha x}\cos(\beta x) = e^{2x}\cos 2x$. Od tod sledi, da je $\alpha = 2$ in $\beta = 2$. Iz tabele velja, če α oziroma $\alpha + i\beta$ ni ničla karakterističnega polinoma potem je $s = 0$.
Nastavek je tako enak: $x^0 e^{2x}(A\sin(2x) + B\cos(2x))$ oziroma $e^{2x}(A\sin(2x) + B\cos(2x))$.

Poiščimo manjkajoče vrednosti A, B danega partikularnega nastavka.
Potrebujemo prvi in drugi odvod partikularnega nastavka. $y_p = e^{2x}(A\sin(2x) + B\cos(2x))$, $\quad y_p' = 2e^{2x}((A - B)\sin(2x) + (A + B)\cos(2x))$, $\quad y_p'' = 4e^{2x}(-2B\sin(2x) + 2A\cos(2x))$.

Ker je $y'' + y' - 6y = e^{2x}\cos 2x$ velja enakost $4e^{2x}(-2B\sin(2x) + 2A\cos(2x)) + 2e^{2x}((A-B)\sin(2x) + (A+B)\cos(2x)) - 6(e^{2x}(A\sin(2x) + B\cos(2x))) = e^{2x}\cos 2x$.
Od tod sledi $10A - 4B = 1, \quad -4A - 10B = 0$. Manjkajoči neznanki A, B sta enaki $A = \frac{5}{58}, \quad B = -\frac{1}{29}$.
Partikularni del rešitve je enak $y_p = e^{2x}(\frac{5}{58}\sin(2x) - \frac{1}{29}\cos(2x))$.

Končna, skupna rešitev je enaka $y_S = e^{2x}(\frac{5}{58}\sin(2x) - \frac{1}{29}\cos(2x)) + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$.

(g) $y'' + 3y' - 10y = x^2 e^x$

Karakteristični polinom pripadajoče diferencialne enačbe je enak $\lambda^2 + 3\lambda - 10 = 0$.
Ničli karakterističnega polinoma sta $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 2$.
Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je enaka

$$y_H = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x}.$$

Poiščimo sedaj partikularno rešitev diferencialne enačbe.

Desni del enačbe predstavlja produkt polinoma druge stopnje z eksponentno funkcijo $x^2 e^x$.
Sedaj uporabimo tretji nastavek v naši tabeli.
$x^2 e^{\alpha x} \quad (Ax^2 + Bx + C)x^s e^x$.
$x^2 e^{\alpha x} = x^2 e^{1x}$. Od tod sledi, da je $\alpha = 1$. Iz tabele velja, če α oziroma $\alpha + i\beta$ ni ničla karakterističnega polinoma potem je $s = 0$.
Nastavek je tako enak: $(Ax^2 + Bx + C)x^0 e^{1x}$ oziroma $(Ax^2 + Bx + C)e^x$.

Poiščimo manjkajoče vrednosti A, B, C danega partikularnega nastavka.
Potrebujemo prvi in drugi odvod partikularnega nastavka. $y_p = (Ax^2 + Bx + C)e^x$, $y_p' = (Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C)e^x$, $y_p'' = (Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B + C)e^x$.
Ker je $y''+3y'-10y = x^2 e^x$ velja enakost $(Ax^2+4Ax+Bx+2A+2B+C)e^x+3((Ax^2+2Ax+Bx+B+C)e^x)-10((Ax^2+Bx+C)e^x) = x^2 e^x$.
Od tod sledi $(-6A)x^2 e^x + (10A-6B)xe^x + (2A+5B-6C)e^x = x^2 e^x$.
Dele ob neznankah enačimo $-6A = 1$, $(10A-6B) = 0$, $(2A+5B-6C) = 0$. Manjkajoče neznanke A, B, C so enake $A = -\frac{1}{6}$, $B = -\frac{5}{18}$, $C = -\frac{31}{108}$.
Partikularni del rešitve je enak $y_p = (-\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{18}x - \frac{31}{108})e^x$.

Končna, skupna rešitev je enaka $y_S = (-\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{18}x - \frac{31}{108})e^x + C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x}$.

(h) $y'' + 2y' + 5y = 16e^x + \sin 2x$

Karakteristični polinom pripadajoče diferencialne enačbe je enak $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$.
Ničli karakterističnega polinoma sta $\lambda_1 = -2 + 2i$, $\lambda_2 = -2 - 2i$.
Rešitev homogenega dela diferencialne enačbe je enaka

$$y_H = e^{-2x}(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)).$$

Poiščimo sedaj partikularno rešitev diferencialne enačbe.
Desni del enačbe predstavlja vsoto eksponentne funkcije s sinusno funkcijo $16e^x + \sin 2x$.
Partikularni nastavek dobo dobili, kot vsoto dveh nastavkov.
Prvi nastavek je enak : $Ce^{\alpha x} \quad Dx^s e^{\alpha x}$.

$Ce^{\alpha x} = 16e^{1x}$. Od tod sledi, da je $\alpha = 1$. Iz tabele velja, če α oziroma $\alpha + i\beta$ ni ničla karakterističnega polinoma potem je $s = 0$.
Prvi nastavek je tako enak: De^x.
Drugi nastavek dobimo iz $C \sin(\beta x) = x^s(A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x))$.
$Ce^{\alpha x} \sin(\beta x) = e^{0x} \sin 2x$. Od tod sledi, da je $\alpha = 0$, $\beta = 2$. Iz tabele velja, če α oziroma $\alpha + i\beta$ ni ničla karakterističnega polinoma potem je $s = 0$.
Drugi nastavek je tako enak: $A \sin(2x) + B \cos(2x)$.

Poiščimo manjkajoči vrednosti A, B danega partikularnega nastavka.
Potrebujemo prvi in drugi odvod partikularnega nastavka. $y_p = De^x + A \sin(2x) + B \cos(2x)$, $y_p' = De^x + 2A \cos(2x) - 2B \sin(2x)$, $y_p'' = De^x - 4A \sin(2x) - 4B \cos(2x)$.
Ker je $y'' + 2y' + 5y = 16e^x + \sin 2x$ velja enakost $De^x - 4A \sin(2x) - 4B \cos(2x) + 2(De^x + 2A \cos(2x) - 2B \sin(2x)) + 5(De^x + A \sin(2x) + B \cos(2x)) = 16e^x + \sin 2x$.
Od tod sledi $8De^x + (A - 4B) \sin(2x) + (4A + B) \cos(2x) = 16e^x + 1 \sin(2x) + 0 \cos(2x)$.
Dele ob neznankah enačimo $8D = 16$, $(A - 4B) = 1$, $(4A + B) = 0$.
Manjkajoče neznanke A, B, D so enake $A = \frac{1}{17}$, $B = -\frac{4}{17}$, $D = 2$.
Partikularni del rešitve je enak $y_p = 2e^x + \frac{1}{17} \sin(2x) + -\frac{4}{17} \cos(2x)$.

Končna, skupna rešitev je enaka $y_S = 2e^x + \frac{1}{17} \sin(2x) + -\frac{4}{17} + e^{-2x}(C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x))$.

Poglavje 4

Funkcije več spremenljivk

1. Poiščite naravna definicijska območja funkcij dveh spremenljivk:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2}$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{81 - x^2 - y^2}$

   (c) $f(x,y) = \ln{(25 - x^2 - y^2)}$

   (d) $f(x,y) = \ln{(y - x^2 + 3)}$

   (e) $f(x,y) = 16 - 3x - y$

   (f) $f(x,y) = 7x + 3xy - 4e^{x^2+xy+2}$

   (g) $f(x,y) = \frac{7xy}{y^2+x^2}$

   (h) $f(x,y) = \frac{5x}{y^2-x^2}$

   (i) $f(x,y) = \frac{3y}{y-4x}$

   (j) $f(x,y) = 2\sqrt{2x+y-1} + \sqrt{6 - x^2 - y^2}$

   (k) $f(x,y) = \ln(2x\ln(y-3x))$

   (l) $f(x,y) = 2\arcsin\frac{y}{x} - 7\sqrt{4x - 4x^2 - y^2}$

   (m) $f(x,y) = -3\arctan\sqrt{5y-x} + \sin{(2-3xy)} + 9(4-7x^5)^{\frac{7}{y}}$

Rešitev.

(a) Funkcija je definirana za vse tiste pare $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, za katere je $y^2 - x^2 \geq 0$ oziroma $y^2 \geq x^2$. Od tod dobimo $|y| \geq |x|$.

(b) Funkcija je definirana za vse tiste pare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, za katere je $81 - x^2 - y^2 \geq 0$ oziroma $x^2 + y^2 \leq 81$. To so točke, ki ležijo na krogu s sredi ščem v koordinatnem izhodišču in polmerom 9.

(c) Funkcija je definirana za vse tiste pare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, za katere je $25 - x^2 - y^2 > 0$. To so točke, ki ležijo znotraj kroga s središčem v koordinatnem izhodišču in polmerom 5.

(d) Funkcija je definirana na območju, kjer je $y - x^2 + 3 > 0$, saj je logaritem definiran samo za pozitivna realna števila. Torej je $y > x^2 - 3$. To so točke, ki ležijo nad parabolo $y = x^2 - 3$.

(e) Funkcija je definirana za vse točke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(f) Funkcija je definirana za vse točke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(g) Funkcija je definirana povsod razen tam, kjer je imenovalec enak 0. Torej funkcija ni definirana, če je $x^2+y^2 = 0$ oziroma $(x, y) = (0, 0)$.

(h) Funkcija ni definirana, če je $y^2 - x^2 = 0$, kar pomeni $|x| = |y|$.

(i) Funkcija ni definirana, če je $y - 4x = 0$ oziroma $y = 4x$.

(j) Funkcija je definirana za vse točke $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, za katere je $y \geq 1-2x$ in $x^2 + y^2 \leq 6$.

(k) Funkcija je definirana na območju, kjer je $2x \ln(y - 3x) > 0$:

   i. $x > 0$ in $\ln(y - 3x) > 0$, kar pomeni $x > 0$ in $y - 3x > 1$,

   ii. $x < 0$ in $\ln(y - 3x) < 0$, kar pomeni $x < 0$ in $y < 3x + 1$.

(l) Ker je funkcija arcsin definirana na intervalu $[-1, 1]$, je definicijsko območje množica parov $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, za katere velja

$$-1 \leq \frac{y}{x} \leq 1 \quad \text{in} \quad (2x - 1)^2 + y^2 \leq 1.$$

Torej je to množica parov $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, za katere velja $x \neq 0$, $y \leq x$, $-x \leq y$ in $(2x - 1)^2 + y^2 \leq 1$.

(m) Definicijsko območje je množica točk $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, za katere velja $y \geq \frac{x}{5}$ in $y \neq 0$.

2. S pomočjo nivojnic in prerezov predstavite funkcije:

Funkcijo dveh spremenljivk lahko geometrijsko ponazorimo s pomočjo nivojnic in prerezov. Naj bo $a \in R$ število iz zaloge vrednosti funkcije $f(x,y)$. Definirajmo

$$N_a = \{f(x,y) \in D | f(xy) = a\}.$$

Tej množici pravimo **nivojnica** funkcije f pri vrednosti a. Očitno vsaka točka $(x,y) \in D$ leži na natanko eni nivojnici funkcije. Družina vseh nivojnic $f(x,y) = a$ napolni celotno območje D, ko a preteče vse vrednosti funkcije f. Torej, nivojnica povezuje točke na isti višini. To lahko primerjamo z izohipsami na zemljevidu, ki povezujejo iste višinske točke.

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

(b) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

(c) $f(x,y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$

(d) $f(x,y) = 3x + 4y$

(e) $f(x,y) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$

(f) $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16}$

(g) $f(x,y) = \sqrt{x + y}$

(h) $f(x,y) = \ln(4x^2 - 3y)$

(i) $f(x,y) = y(x^2 - 1)$

(j) $f(x,y) = \frac{x}{y^2+x^2}$

Rešitev.

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

Nivojnice, $f(x,y) = a$:
$N_0, \quad x^2 + y^2 = 0.$
Dobljena enačba je enačba krožnice s središčem v točki $T_0 = (0,0)$ ter radijem $r = \sqrt{0} = 0.$
$N_1, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad T_1 = (0,0), r = \sqrt{1} = 1.$
$N_2, \quad x^2 + y^2 = 2, \quad T_2 = (0,0), r = \sqrt{2} = 1,41.$
$N_3, \quad x^2 + y^2 = 3, \quad T_3 = (0,0), r = \sqrt{3} = 1,73.$

(b) $f(x,y) = 3x + 4y$

Nivojnice, $f(x,y) = a:$
N_0, $3x + 4y = 0$. Dobljena enačba je enačba premice $y_0 = -\frac{3}{4}x$.
N_1, $3x + 4y = 1$, $y_1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}x$.
N_2, $3x + 4y = 2$, $y_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x$.
N_3, $3x + 4y = 3$, $y_3 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x$.
N_4, $3x + 4y = 4$, $y_4 = 1 - \frac{3}{4}x$.

(c) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Nivojnice, $f(x,y) = a:$
N_0, $\sqrt{4 - x^2 - y^2} = 0$, $x^2 + y^2 = 4$, Dobljena enačba je enačba krožnice s središčem v točki $T_0 = (0,0)$ ter radijem $r = \sqrt{4} = 2$.
N_1, $\sqrt{4 - x^2 - y^2} = 1$, $x^2 + y^2 = 3$, $T_1 = (0,0), r = \sqrt{3}$.
N_2, $\sqrt{4 - x^2 - y^2} = 2$, $x^2 + y^2 = 0$, $T_2 = (0,0), r = 0$.

(d) $f(x,y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Nivojnice, $f(x,y) = a:$
N_0, $-\sqrt{9 - x^2 - y^2} = 0$, $x^2 + y^2 = 9$.
Dobljena enačba je enačba krožnice s središčem v točki $T_0 = (0,0)$ ter radijem $r = \sqrt{9} = 3$.
N_1, $-\sqrt{9 - x^2 - y^2} = -1$, $x^2 + y^2 = 8$, $T_1 = (0,0), r = \sqrt{8} = 2,82$.
N_2, $-\sqrt{9 - x^2 - y^2} = -2$, $x^2 + y^2 = 5$, $T_2 = (0,0), r = \sqrt{5} = 2,23$.
N_3, $-\sqrt{9 - x^2 - y^2} = -3$, $x^2 + y^2 = 0$, $T_3 = (0,0), r = \sqrt{0} = 0$.

(e) $f(x,y) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$

Nivojnice, $f(x,y) = a:$
N_0, $2\sqrt{x^2 + y^2} = 0$.
Dobljena enačba je enačba krožnice s središčem v točki $T_0 = (0,0)$ ter radijem $r = 0$.
N_1, $2\sqrt{x^2 + y^2} = 1$, $T_1 = (0,0), r = \frac{1}{2}$.
N_2, $2\sqrt{x^2 + y^2} = 2$, $T_2 = (0,0), r = 1$.
N_3, $2\sqrt{x^2 + y^2} = 3$, $T_3 = (0,0), r = \frac{3}{2}$.

(f) $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16}$

Nivojnice, $f(x,y) = a$:
N_1, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.
Dobljena enačba je enačba elipse s središčem v točki $T_0 = (0,0)$ ter manjšo in večjo polosjo $a = 2, b = 4$.
N_2, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 2$.
Enačbo preoblikujemo $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{32} = 1$.
Dobljena enačba je enačba elipse s središčem v točki $T_0 = (0,0)$ ter manjšo in večjo polosjo $a = \sqrt{8}, b = \sqrt{32}$.
N_3, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 3$.
Enačbo preoblikujemo $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{48} = 1$.
Dobljena enačba je enačba elipse s središčem v točki $T_0 = (0,0)$ ter manjšo in večjo polosjo $a = \sqrt{12}, b = \sqrt{48}$.
N_4, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 4$.
Enačbo preoblikujemo $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$.
Dobljena enačba je enačba elipse s središčem v točki $T_0 = (0,0)$ ter manjšo in večjo polosjo $a = 4, b = 8$.

(g) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$

Nivojnice, $f(x,y) = a$:
N_0, $\sqrt{x+y} = 0$. Dobljena enačba je enačba premice $y = -x$.
N_1, $\sqrt{x+y} = 1$, $y = 1 - x$.
N_2, $\sqrt{x+y} = 2$, $y = 4 - x$.
N_3, $\sqrt{x+y} = 3$, $y = 9 - x$.
N_4, $\sqrt{x+y} = 4$, $y = 16 - x$.

(h) $f(x,y) = \ln(4x^2 - 3y)$

Nivojnice, $f(x,y) = a$:
N_0, $\ln(4x^2 - 3y) = 0$, $\ln(4x^2 - 3y) = \ln e^0$, $y = \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}$.
N_1, $\ln(4x^2 - 3y) = 1$, $\ln(4x^2 - 3y) = \ln e^1$, $y = \frac{4}{3}x^2 - \frac{e}{3}$.
N_2, $\ln(4x^2 - 3y) = 2$, $\ln(4x^2 - 3y) = \ln e^2$, $y = \frac{4}{3}x^2 - \frac{e^2}{3}$.
N_3, $\ln(4x^2 - 3y) = 3$, $\ln(4x^2 - 3y) = \ln e^3$, $y = \frac{4}{3}x^2 - \frac{e^3}{3}$.
N_4, $\ln(4x^2 - 3y) = 4$, $\ln(4x^2 - 3y) = \ln e^4$, $y = \frac{4}{3}x^2 - \frac{e^4}{3}$.
Dobljene nivojnice so parabole.

(i) $f(x,y) = y(x^2-1)$

Nivojnice, $f(x,y) = a$:
N_0, $y(x^2-1) = 0$, $y = \frac{0}{x^2-1}$.
N_1, $y(x^2-1) = 1$, $y = \frac{1}{x^2-1}$.
N_2, $y(x^2-1) = 2$, $y = \frac{2}{x^2-1}$.
N_3, $y(x^2-1) = 3$, $y = \frac{3}{x^2-1}$.
N_4, $y(x^2-1) = 4$, $y = \frac{4}{x^2-1}$.
Dobljene nivojnice so racionalne funkcije.

(j) $f(x,y) = \frac{x}{y^2+x^2}$

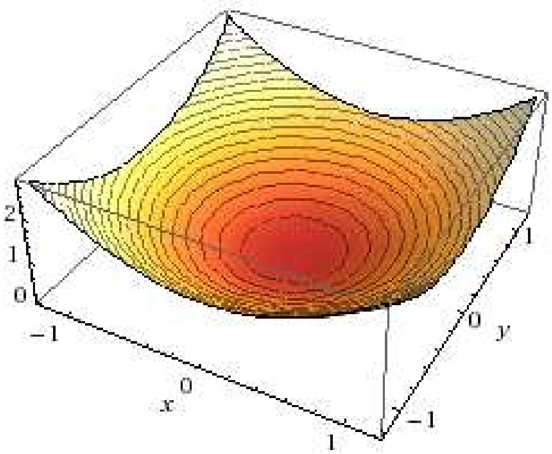
Nivojnice, $f(x,y) = a$:

N_1, $\frac{x}{y^2+x^2} = 1$.
Enačbo preoblikujemo: $x^2 - x + y^2 = 0, (x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + y^2 = 0$,
$(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.
Dobljena enačba je enačba krožnice s središčem $T_1 = (\frac{1}{2}, 0), r = \frac{1}{2}$.

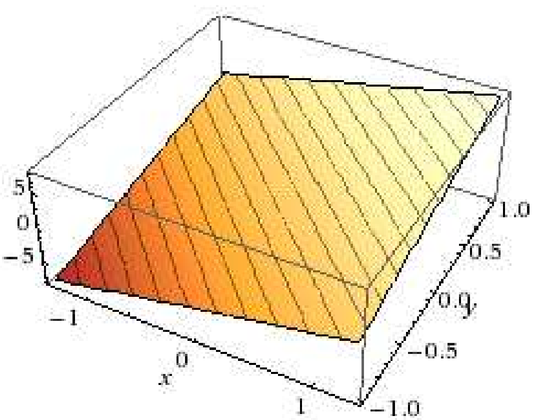
N_2, $\frac{x}{y^2+x^2} = 2$.
Enačbo preoblikujemo: $x^2 - \frac{x}{2} + y^2 = 0$, $(x-\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} + y^2 = 0$,
$(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{16}$.
Dobljena enačba je enačba krožnice s središčem $T_2 = (\frac{1}{4}, 0), r = \frac{1}{4}$.

N_3, $\frac{x}{y^2+x^2} = 3$.
Enačbo preoblikujemo: $x^2 - \frac{x}{3} + y^2 = 0$, $(x-\frac{1}{6})^2 - \frac{1}{36} + y^2 = 0$,
$(x-\frac{1}{6})^2 + y^2 = \frac{1}{36}$.
Dobljena enačba je enačba krožnice s središčem $T_3 = (\frac{1}{6}, 0), r = \frac{1}{6}$.

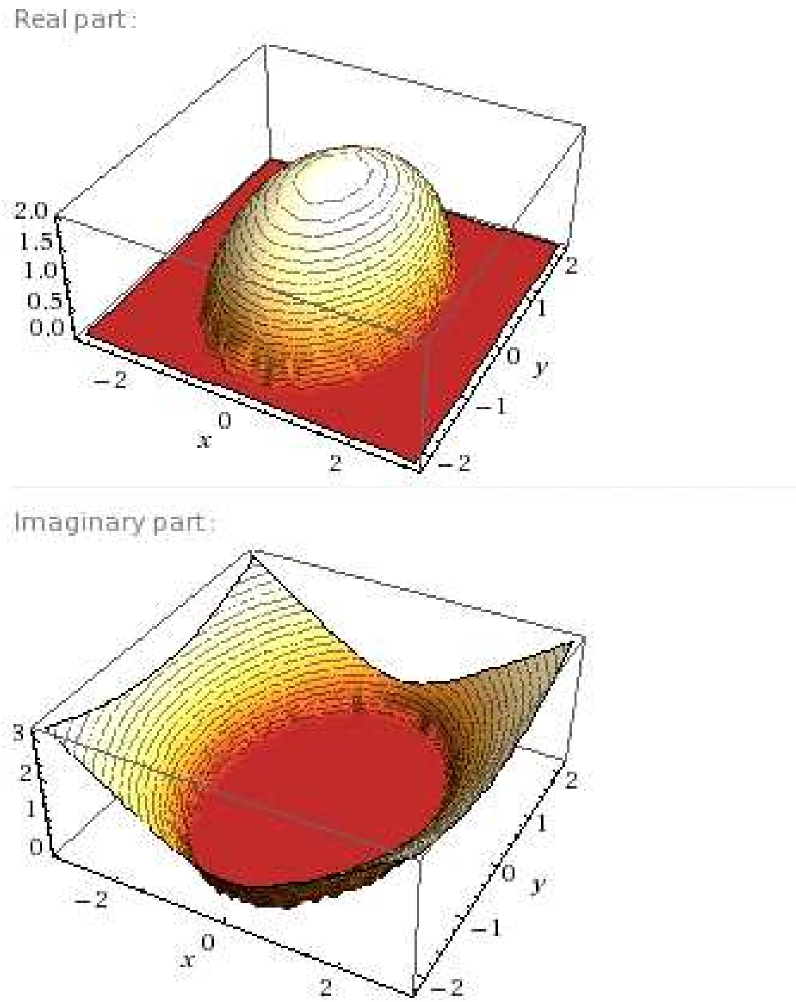
N_4, $\frac{x}{y^2+x^2} = 4$.
Enačbo preoblikujemo: $x^2 - \frac{x}{4} + y^2 = 0$, $(x-\frac{1}{8})^2 - \frac{1}{64} + y^2 = 0$,
$(x-\frac{1}{8})^2 + y^2 = \frac{1}{64}$.
Dobljena enačba je enačba krožnice s središčem $T_3 = (\frac{1}{8}, 0), r = \frac{1}{8}$.



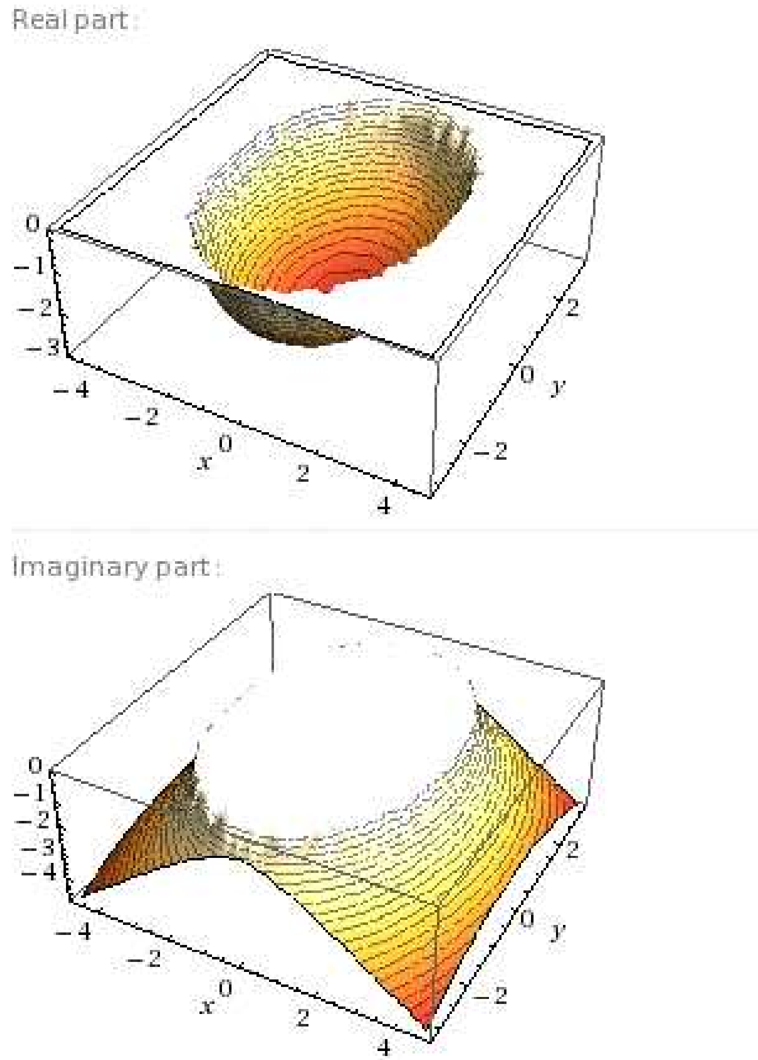
Slika 4.1: $f(x,y) = x^2 + y^2$



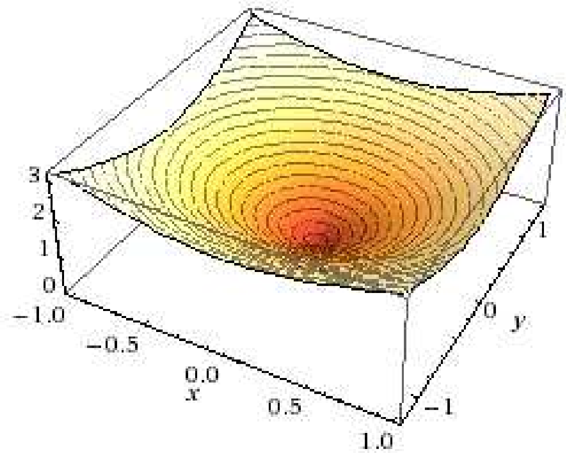
Slika 4.2: $f(x,y) = 3x + 4y$



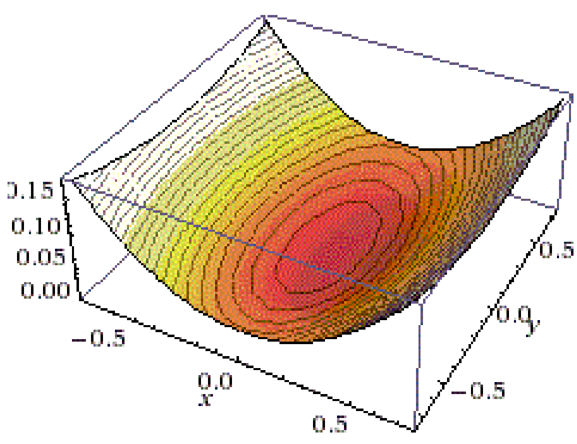
Slika 4.3: $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$



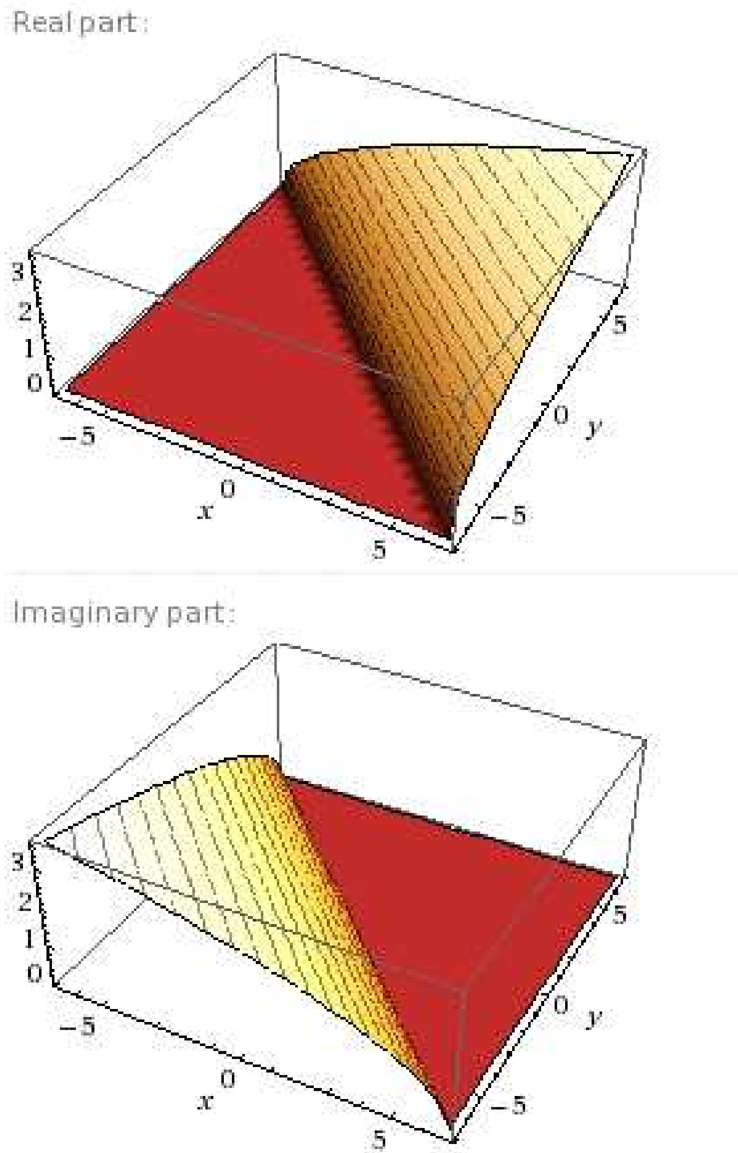
Slika 4.4: $f(x,y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$



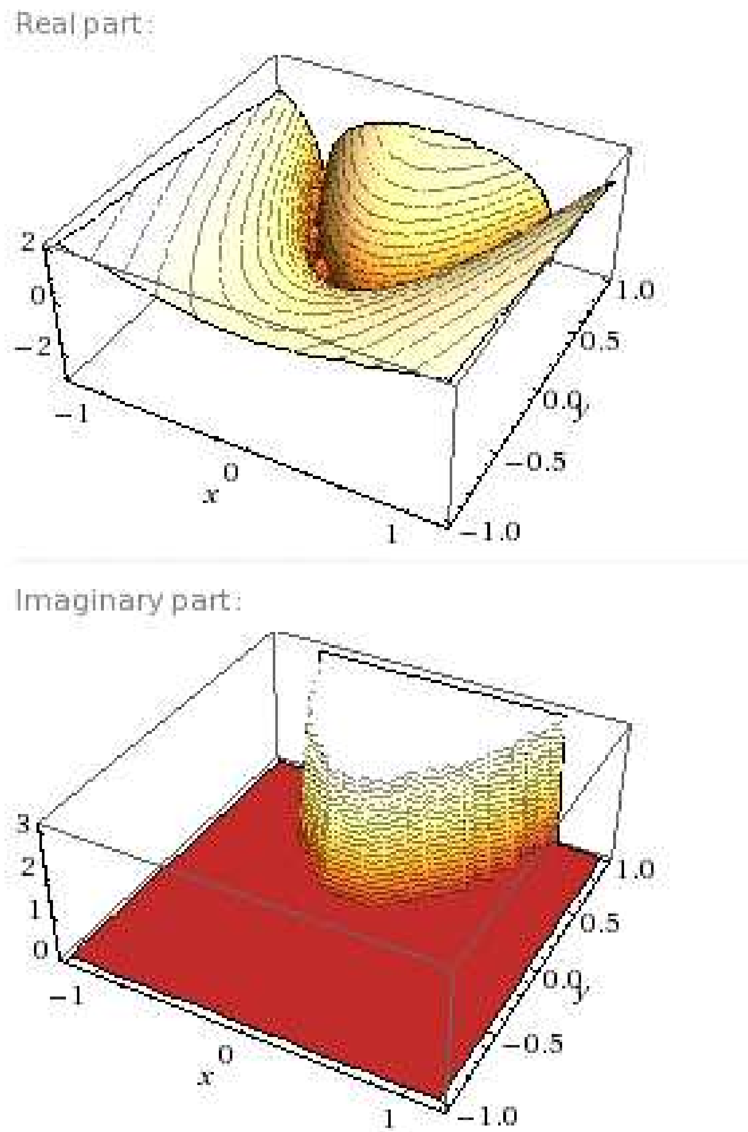
Slika 4.5: $f(x,y) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$



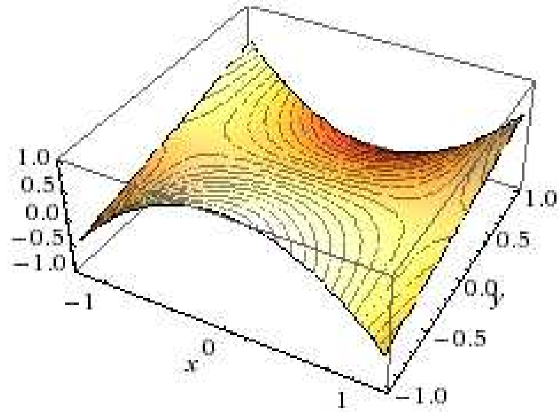
Slika 4.6: $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16}$



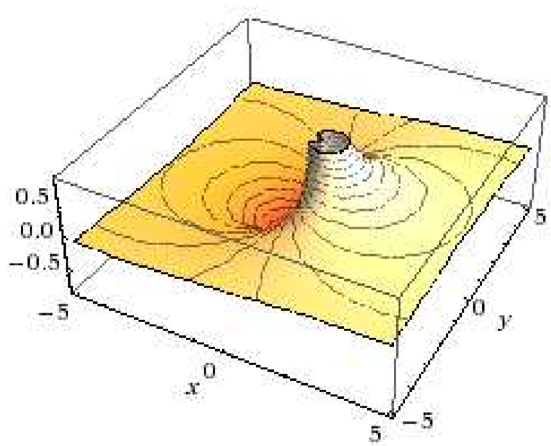
Slika 4.7: $f(x, y) = \sqrt{x + y}$



Slika 4.8: $f(x,y)=\ln(4x^2-3y)$



Slika 4.9: $f(x, y) = y(x^2 - 1)$



Slika 4.10: $f(x, y) = \frac{x}{y^2+x^2}$

3. Določite število a tako, da bo funkcija f, podana s predpisom

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2;\ \text{če } x^2 + y^2 \leq 9 \\ a;\ \text{sicer} \end{array} \right. ,$$

zvezna.

Rešitev. Število a moramo določiti tako, da bo funkcija f zvezna na množici točk $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 9\}$. Množica K predstavlja krožnico s polmerom 3. Funkcijska vrednost funkcije f v poljubni točki, ki leži na krožnici K, je $f(x,y) = x^2 + y^2 = 9$. Torej mora biti $a = 9$. V notranjosti kroga je funkcija očitno zvezna.

4. Ali je funkcija f zvezna v točki $(0,0)$?

(a) $f(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2xy}{x^2+y^2};\quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0;\ (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$

(b) $f(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2};\quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0;\ (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$

(c) $f(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2y}{x^2+y^2};\quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0;\ (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$

(d) $f(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2};\quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0;\ (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$

(e) $f(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{xy^3}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0;\ (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$

(f) $f(x,y) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2};\quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0;\ (x,y) = (0,0) \end{array} \right\}$

Rešitev.

Funkcija dveh spremenljjivk $f(x,y)$ je v točki $(a,b) \in D$ zvezna, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x,y) - f(a,b)| < \epsilon$ za vsak $(x,y) \in D$, ki je od točke (a,b) oddaljen za manj kot δ: $(x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2$.

(a) Če funkcijo $f(x,y)$ izrazimo v polarnih koordinatah $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi)$, je

$$\begin{aligned} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) &= \frac{2r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} \\ &= 2\cos\varphi\sin\varphi = \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Iz tega sledi, da je

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - f(0,0) = 2\cos\varphi\sin\varphi = \sin 2\varphi$$

kar pomeni, da funkcija $f(x,y)$ ni zvezna v točki $(0,0)$.

(b) Če funkcijo $f(x,y)$ izrazimo v polarnih koordinatah $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi)$, je

$$\begin{aligned} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) &= r^2\cos\varphi\sin\varphi\frac{r^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} \\ &= \frac{1}{2}r^2\sin 2\varphi\cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Pokazati želimo, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $\left|\frac{1}{2}r^2\sin 2\varphi\cos 2\varphi\right| < \epsilon$, če je $r < \delta$. Če izberemo $\delta = \sqrt{\epsilon}$, sledi želeno.

(c) Če funkcijo $f(x,y)$ izrazimo v polarnih koordinatah $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi)$, je

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}$$

Pokazati želimo, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $\left|\frac{r\cos^2\varphi\sin\varphi}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}\right| < \epsilon$, če je $r < \delta$. Če izberemo $\delta = \frac{1}{\epsilon}$, sledi želeno.

(d) Če funkcijo $f(x,y)$ izrazimo v polarnih koordinatah $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, je

$$\begin{aligned} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) &= \frac{r^2\cos^2\varphi r^2\sin^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} \\ &= r^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi. \end{aligned}$$

Pokazati želimo, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $\left| r^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \right| < \epsilon$, če je $r < \delta$. Če izberemo $\delta = \sqrt{\epsilon}$, sledi želeno.

(e) Če funkcijo $f(x, y)$ izrazimo v polarnih koordinatah $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, je

$$
\begin{aligned}
f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) &= \frac{r\cos\varphi r^3 \sin^3\varphi}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}} \\
&= r^3 \cos\varphi \sin^3\varphi.
\end{aligned}
$$

Pokazati želimo, da za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $\left| r^3 \cos \varphi \sin^3 \varphi \right| < \epsilon$, če je $r < \delta$. Če izberemo $\delta = \sqrt[3]{\epsilon}$, sledi želeno.

(f) Če funkcijo $f(x, y)$ izrazimo v polarnih koordinatah $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, je

$$
\begin{aligned}
f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) &= \frac{r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} \\
&= \cos 2\varphi
\end{aligned}
$$

Iz tega sledi, da je

$$
f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - f(0,0) = \cos 2\varphi
$$

kar pomeni, da funkcija $f(x, y)$ ni zvezna v točki $(0, 0)$.

5. Izračunajte prve parcialne odvode funkcije:

(a) $f(x, y) = 5xy^3 + 7x^4y - 13$

(b) $f(x, y) = -3x^7 - 6yx + 2\ln(x^3y)$

(c) $f(x, y) = \sqrt{7x^2y - 11xy + 3}$

(d) $f(x, y) = \cos^6(-2x^4 - 5xy^2 + 7)$

(e) $f(x, y) = 6y^{-3}e^{-x^3y^2+7x-2}$

(f) $f(x, y) = \frac{5x^2y^3}{3x^7+y^4}$

(g) $f(x, y) = \frac{(5y^2-x)^{\frac{1}{5}}}{x^3+y^2}$

(h) $f(x, y, z) = -9x^3z^2 - 7xyz^3 + 5x^2y + 14$

(i) $f(x,y,z) = \sin(x^2yz)$

(j) $f(x,y,z) = \sin^4(xyz^2 - 3xz^5 + 8y)$

(k) $f(x,y,z) = x^2ze^{\frac{2}{xy}} + 3x\sqrt{yz^2} - 11$

Rešitev. Parcialni odvod (po neki spremenljivki) računamo kot običajni odvod funkcije (po isti spremenljivki), pri čemer vse ostale spremenljivke obravnavamo kot konstante (tj. jih fiksiramo).

(a) Parcialni odvod po spremenljivki x:

$$f_x(x,y) = 5y^3 + 28x^3y.$$

Parcialni odvod po spremenljivki y:

$$f_y(x,y) = 15xy^2 + 7x^4.$$

(b) Parcialni odvod po spremenljivki x:

$$f_x(x,y) = -21x^6 - 6y + 6x^{-1}.$$

Parcialni odvod po spremenljivki y:

$$f_y(x,y) = -6x + 2y^{-1}.$$

(c) Rešitev je

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{1}{2}(7x^2y - 11xy + 3)^{-\frac{1}{2}}y(14x - 11) \\ f_y(x,y) &= \frac{1}{2}(7x^2y - 11xy + 3)^{-\frac{1}{2}}x(7x - 11) \end{aligned}$$

(d) Parcialna odvoda izračunamo po pravilu za posredno odvajanje:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 6(-8x^3 - 5y^2)\cos^5(-2x^4 - 5xy^2 + 7)\sin(-2x^4 - 5xy^2 + 7), \\ f_y(x,y) &= -10xy\cos^5(-2x^4 - 5xy^2 + 7)\sin(-2x^4 - 5xy^2 + 7). \end{aligned}$$

(e) Rešitev je

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 6y^{-3}e^{-x^3y^2+7x-2}(-3x^2y^2 + 7) \\ f_y(x,y) &= e^{-x^3y^2+7x-2}(-18y^{-4} - 2x^3y) \end{aligned}$$

(f) Parcialna odvoda izračunamo po pravilu odvajanja ulomkov:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{10xy^3(3x^7+y^4)-5x^2y^3(21x^6)}{(3x^7+y^4)^2}, \\ f_y(x,y) &= \frac{15x^2y^2(3x^7+y^4)-5x^2y^3}{(3x^7+y^4)^2}. \end{aligned}$$

(g) Rešitev je

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{\frac{1}{5}\cdot(5y^2-x)^{\frac{-4}{5}}(x^3+y^2)-3(5y^2-x)^{\frac{1}{5}}x^2}{(x^3+y^2)^2} \\ f_y(x,y) &= \frac{2y(5y^2-x)^{\frac{-4}{5}}(x^3+y^2)-(5y^2-x)^{\frac{1}{5}}2y}{(x^3+y^2)^2} \end{aligned}$$

(h) Rešitev je

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= -27x^2z^2-7yz^3+10xy \\ f_y(x,y,z) &= -7xz^3+5x^2 \\ f_z(x,y,z) &= -18x^3z-21xyz^2 \end{aligned}$$

(i) Rešitev je

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= 2xyz\cos x^2yz \\ f_y(x,y,z) &= x^2z\cos xyz \\ f_z(x,y,z) &= x^2y\cos xyz \end{aligned}$$

(j) Rešitev je

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= 4z^2(y-3z^3)\sin^3(xyz^2-3xz^5+8y)\cos(xyz^2-3xz^5+8y) \\ f_y(x,y,z) &= 4(xz^2+8)\sin^3(xyz^2-3xz^5+8y)\cos(xyz^2-3xz^5+8y) \\ f_z(x,y,z) &= 4x(2yz-15z^4)\sin^3(xyz^2-3xz^5+8y)\cos(xyz^2-3xz^5+8y) \end{aligned}$$

(k) Rešitev je

$$\begin{aligned} f_x(x,y,z) &= ze^{\frac{2}{xy}}(1-\frac{2}{y})+3\sqrt{yz^2} \\ f_y(x,y,z) &= -2xzy^{-2}e^{\frac{2}{xy}}+\frac{3}{2}xzy^{-\frac{1}{2}} \\ f_z(x,y,z) &= x^2e^{\frac{2}{xy}}+3xy^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

6. Izračunajte prve in druge parcialne odvode funkcije:

(a) $f(x,y) = x^9y^3 - 5\sqrt{xy}$

(b) $f(x,y) = \ln(x^3y + 7y + 1)$

(c) $f(x,y) = \cos(7xy)$

(d) $f(x,y) = xe^{5xy} + y^4$

(e) $f(x,y) = \sqrt{x^3y + 2y - 1} - 5yx^{\frac{3}{5}}$.

Rešitev.

(a) Drugi parcialni odvodi so definirani kot parcialni odvodi prvih odvodov. Najprej izračunamo oba prva parcialna odvoda:

$$f_x(x,y) = 9x^8y^3 - \frac{5}{2}y^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}, \quad f_y(x,y) = 3x^9y^2 - \frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}.$$

Drugi parcialni odvodi so:

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= (f_x(x,y))_x = 72x^7y^3 + \frac{5}{4}y^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}, \\
f_{xy}(x,y) &= (f_x(x,y))_y = 27x^8y^2 - \frac{5}{4}y^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}, \\
f_{yx}(x,y) &= (f_y(x,y))_x = 27x^8y^2 - \frac{5}{4}y^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}, \\
f_{yy}(x,y) &= (f_y(x,y))_y = 6x^9y + \frac{5}{4}y^{-\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Ker je obravnavana funkcija (zvezno) parcialno odvedljiva, so mešani odvodi med seboj enaki.

(b) Prva parcialna odvoda:

$$f_x(x,y) = \frac{3x^2y}{x^3y + 7y + 1}, \quad f_y(x,y) = \frac{x^3 + 7}{x^3y + 7y + 1}.$$

Drugi parcialni odvodi:

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= \frac{6xy(x^3y + 7y + 1) - 9x^4y^2}{(x^3y + 7y + 1)^2}, \\
f_{xy}(x,y) &= \frac{3x^2(x^3y + 7y + 1) - 3x^2y(x^3 + 7)}{(x^3y + 7y + 1)^2}, \\
f_{yx}(x,y) &= f_{xy}(x,y), \\
f_{yy}(x,y) &= \frac{-(x^3 + 7)(x^3 + 7)}{(x^3y + 7y + 1)^2}.
\end{aligned}$$

(c) Prva parcialna odvoda:

$$f_x(x,y) = -7y\sin(7xy), \quad f_y(x,y) = -7x\sin(7xy).$$

Drugi parcialni odvodi:

$$f_{xx}(x,y) = -49y^2\cos(7xy), \quad f_{xy}(x,y) = -7\sin(7xy) - 49xy\cos(7xy),$$
$$f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y), \quad f_{yy}(x,y) = -49x^2\cos(7xy).$$

(d) Prva parcialna odvoda:

$$xe^{5xy} + y^4 f_x(x,y) = e^{5xy}(1+5xy), \quad f_y(x,y) = 5x^2e^{5xy} + 5y^3.$$

Drugi parcialni odvodi:

$$f_{xx}(x,y) = 5ye^{5xy}(2+5xy), \quad f_{xy}(x,y) = 5xe^{5xy}(2+5xy),$$
$$f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y), \quad f_{yy}(x,y) = 5(5x^3e^{5xy} + 3y^2).$$

(e) Prva parcialna odvoda:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{3}{2}x^2y(x^3y+2y-1)^{-\frac{1}{2}} - 3yx^{-\frac{2}{5}}, \\ f_y(x,y) &= \frac{1}{2}(x^2+2)(x^3y+2y-1)^{-\frac{1}{2}} - 5x^{\frac{3}{5}}. \end{aligned}$$

Drugi parcialni odvodi:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 3xy(x^3y+2y-1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{9}{4}x^4y^2(x^3y+2y-1)^{-\frac{3}{2}} + \frac{6}{5}yx^{-\frac{7}{5}}, \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{3}{2}x^2(x^3y+2y-1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}x^2y(x^3+2)(x^3y+2y-1)^{-\frac{3}{2}} - 3x^{-\frac{2}{5}}, \\ f_{yy}(x,y) &= -\frac{1}{4}(x^3+2)^2(x^3y+2y-1)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

7. Naj bo $f(x,y) = \frac{e^{x+y} - e^{x-y}}{3}$. Pokažite, da je:

(a) $f_x(x,y) - f_y(x,y) = \frac{-2}{3}e^{x-y}$

(b) $f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = 2f(x,y)$

(c) $f_{xx}(x,y) + 2f_{xy}(x,y) + f_{yy}(x,y) = \frac{4}{3}e^{x+y}$

Rešitev.

(a) Ker je $f_x(x,y) = f(x,y)$ in $f_y(x,y) = \frac{e^{x+y}+e^{x-y}}{3}$, sledi želeno $f_x(x,y) - f_y(x,y) = \frac{-2}{3}e^{x-y}$.

(b) Ker je $f_{xx}(x,y) = f_{yy}(x,y) = f(x,y)$, je $f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = 2f(x,y)$.

(c) Upoštevajmo, da je $f_{xy}(x,y) = f_y(x,y)$, kar nas privede do želene enakosti.

8. Poiščite tako realno število a, da bo za funkcijo $f(x,y) = 5y^3 + ax^2y$ veljalo $f_{xx}(x,y) = 5f_{yy}(x,y)$.

Rešitev. Upoštevajmo, da je $f_{xx}(x,y) = 2ay$ in $f_{yy}(x,y) = 30y$, iz česar sledi $a = 3$.

9. Naj bo $f(x,y) = \ln(x^2y^2(x^2+y^2))$. Izračunajte $xf_x(x,y) + yf_y(x,y)$.

Rešitev. Ni težko preveriti, da je $xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = 6$.

10. Pokažite, da za funkcijo $f(x,y) = 4e^{-3x}\cos y$ velja $f_{xx}(x,y) = -9f_{yy}(x,y)$.

Rešitev. Ker je $f_{yy}(x,y) = -4e^{-3y}\cos x$ in $f_{xx}(x,y) = 36e^{-3y}\cos y$, sledi želeno.

11. Naj bo $f(x,y) = \frac{e^{x-y}+\cos(y-x)}{x^2y^2}$. Pokažite, da je $\frac{-f_x(x,y)-f_y(x,y)}{e^{x-y}+\cos(y-x)} = \frac{2(x+y)}{x^3y^3}$.

Rešitev. Ker je

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{(e^{x-y}+\sin(y-x))x^2y^2 - (e^{x-y}+\cos(y-x))2xy^2}{x^4y^4}, \\ f_y(x,y) &= \frac{(-e^{x-y}-\sin(y-x))x^2y^2 - (e^{x-y}+\cos(y-x))2x^2y}{x^4y^4}, \end{aligned}$$

sledi želena enakost.

12. S pomočcjo izreka o diferencialu približno izračunajte:

(a) $\sqrt{2.99^2 + 3.02^2}$

(b) $\ln(\sqrt[3]{1.06} + \sqrt[4]{0.94} - 1)$

(c) $1.02^{3.01}$

Rešitev.

(a) Naj bo $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Potem je

$$f_x(x,y) = x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{in} \quad f_x(x,y) = y(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Torej je

$$\begin{aligned} f(2.99, 3.02) &\approx f(3,4) + f_x(3,4)\cdot(-0.01) + f_y(3,4)\cdot(0.02) \\ &= 5 + \frac{3}{5}\cdot\frac{-1}{100} + \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{100} = 5.01. \end{aligned}$$

(b) Naj bo $f(x,y) = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)$. Potem je

$$f_x(x,y) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1)^{-1} \quad \text{in} \quad f_y(x,y) = \frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1)^{-1}.$$

Torej je

$$\begin{aligned} \ln(\sqrt[3]{1.06} + \sqrt[4]{0.94} - 1) &\approx f(1,1) + f_x(1,1)\cdot(0.06) + f_y(1,1)\cdot(-0.06) \\ &\approx 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{100} + \frac{1}{4}\cdot\frac{-6}{100} = 0.01. \end{aligned}$$

(c) Izračunati moramo vrednost funkcije $f(x,y) = x^y$ v točki $(1.02, 3.01)$. Ker je

$$f_x(x,y) = yx^{y-1} \quad \text{in} \quad f_y(x,y) = x^y \ln x,$$

je

$$\begin{aligned} 1.02^{3.01} &\approx f(1,3) + f_x(1,3)\cdot(0.02) + f_y(1,3)\cdot(0.01) \\ &= 1 + 3\cdot\frac{2}{100} = 1.06. \end{aligned}$$

13. S pomočjo diferenciala izračunajte, za koliko odstotkov se poveča volumen valja, če se radij r in višina v valja povečata za 2 %.

Rešitev. Volumen valja je $V = \pi r^2 v$. Zanima nas $\frac{dV}{V} = \frac{V_r dr + V_v dv}{V}$. Upoštevajmo, da je $\frac{dr}{r} = \frac{1}{100}$ in $\frac{dv}{v} = \frac{1}{100}$, iz česar sledi $\frac{dV}{V} = \frac{6}{100}$. Torej se je volumen valja povečal za 6 %.

14. Naj bo f taka preslikava, da paru (a, b) priredi število na naslednji način: če ima funkcija $g(x) = x^2 + ax + b$ realne korene, potem f paru (a, b) priredi večjega od korenov.

(a) Določite definicijsko območje funkcije f.

(b) Izračunajte približno vrednost $f(-1.01, -1.97)$.

Rešitev.

(a) Funkcija $f(a, b) = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$ je definirana za take pare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, da je $a^2 - 4b \geq 0$ oziroma $b \leq \frac{a^2}{4}$.

(b) Ker je

$$f_a(a, b) = \frac{1}{2}(a(a^2 - 4b)^{-\frac{1}{2}} - 1) \quad \text{in} \quad f_b(a, b) = -(a^2 - 4b)^{-\frac{1}{2}},$$

je

$$\begin{aligned} f(-1.01, -1.97) &\approx f(-1, -2) + f_a(-1, -2) \cdot (-0.01) + f_b(-1, -2) \cdot (0.03) \\ &= 2 + \frac{-2}{3} \cdot \frac{-1}{100} + \frac{-1}{3} \cdot \frac{3}{100} = \frac{599}{300}. \end{aligned}$$

15. Zapišite Taylorjev polinom druge stopnje funkcije:

(a) $f(x, y) = x^3 + xy^2$ v okolici točke $(2, 1)$

(b) $f(x, y) = x^y$ v okolici točke $(1, 1)$

(c) $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ v okolici točke $(1, -2)$

Rešitev.

(a) Prve in druge parcialne odvode, izračunane v poljubni točki (x, y) in točki $(2, 1)$, najdemo v spodnji tabeli:

	f	f_x	f_y	f_{xx}	f_{xy}	f_{yy}
(x, y)	$x^3 + xy^2$	$3x^2 + y^2$	$2xy$	$6x$	$2y$	$2x$
$(2, 1)$	10	13	4	12	2	4

Taylorjev približek je enak:

$$f(x, y) \approx 10+13(x-2)+4(y-1)+6(x-2)^2+2(x-2)(y-2)+2(y-1)^2.$$

(b) Prve in druge parcialne odvode, izračunane v poljubni točki (x, y) in točki $(1, 1)$, najdete v spodnji tabeli:

	f	f_x	f_y	f_{xx}	f_{xy}	f_{yy}
(x, y)	x^y	yx^{y-1}	$x^y \ln x$	$y(y-1)x^{y-2}$	$x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x$	$x^y \ln^2 x$
$(1, 1)$	1	1	0	0	1	0

Taylorjev približek je enak:

$$f(x, y) \approx x + (x-1)(y-1).$$

(c) Taylorjev polinom:

$$f(x, y) \approx 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2.$$

16. Zapišite Taylorjev polinom tretje stopnje funkcije $f(x,y)=\frac{x}{y}$

(a) v okolici točke $(0,-1)$

(b) v okolici točke $(1,-2)$

Rešitev.

Prve, druge in tretje parcialne odvode, izračunane v poljubni točki (x,y), točki $(0,-1)$ in točki $(1,-2)$, najdemo v spodnji tabeli:

	f	f_x	f_y	f_{xx}	f_{xy}	f_{yy}	f_{xxx}	f_{xxy}	f_{xyy}	f_{yyy}
(x,y)	xy^{-1}	y^{-1}	$-xy^{-2}$	0	$-y^{-2}$	$2xy^{-3}$	0	0	$2y^{-3}$	$-6xy^{-4}$
$(0,-1)$	0	-1	0	0	-1	0	0	0	-2	0
$(1,-2)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$

Taylorjev približek je enak:

(a)

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx 0+\frac{-1(x-0)}{1!}+\frac{-2(x-0)(y+1)}{2!}+\frac{3\cdot(-2)(x-0)(y+1)^2}{3!} \\ &= -x-x(y+1)-x(y+1)^2. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx -\frac{1}{2}+\frac{-\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4}(y+2)}{1!} \\ &\quad+\frac{2\cdot(-\frac{1}{4})(x-1)(y+2)-\frac{1}{4}(y+2)^2}{2!} \\ &\quad+\frac{3\cdot(-\frac{1}{4})(x-1)(y+2)^2-\frac{3}{8}(y+2)^2}{3!} \\ &= -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4}(y+2)-\frac{1}{4}(x-1)(y+2) \\ &\quad-\frac{1}{8}(y+2)^2-\frac{1}{8}(x-1)(y+2)^2-\frac{1}{16}(y+2)^2. \end{aligned}$$

17. Zapišite Taylorjev polinom tretje stopnje funkcije:

    (a) $f(x,y) = e^x \sin y$ v okolici točke $(0,0)$
    (b) $f(x,y) = e^{x+y}$ v okolici točke $(1,-2)$

Rešitev.

(a) Taylorjev polinom: $f(x,y) \approx y + xy + \frac{1}{6}(3x^2y - y^3)$.
(b) Taylorjev polinom: $f(x,y) \approx 1 + x + y + \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{3}(x+y)^3$.

18. Zapišite Taylorjev polinom četrte stopnje funkcije $f(x,y) = (1-x-y+xy)^{-1}$ v okolici točke $(0,0)$.

Rešitev. Taylorjev polinom:

$$f(x,y) \approx 1+x+y+x^2+xy+y^2+x^3+x^2y+xy^2+y^3+x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$$

19. Poiščite in klasificirajte vse lokalne ekstreme naslednjih funkcij:

Naj bo (a,b) stacionarna točka dvakrat zvezno odvedljive funkcije $f(x,y)$ in naj bodo $f_{xx}(a,b) = A;\quad f_{xy}(a,b) = B;\quad f_{yy}(a,b) = C:$

Potem velja:

(a) Če je $\Delta = AC - B^2 > 0$, je v točki (a,b) lokalni ekstrem in velja:
    i. Če je $A < 0$, je v (a,b) lokalni maksimum,
    ii. Če je $A > 0$, je v (a,b) lokalni minimum.

(b) Če je $\Delta = AC - B^2 < 0$, v točki (a,b) funkcija nima lokalnega ekstrema.

(c) Če je $\Delta = AC - B^2 = 0$, na podlagi drugih parcialnih odvodov običajno o obstoju ekstrema ne moremo sklepati.

(a) $f(x,y) = 5x^2 + 2y^2 - 10(x+y) + 7$

(b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3yx$

(c) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 8x - 4y$

(d) $f(x,y) = e^x - \ln(2y) - x + 2y$

(e) $f(x,y) = xy + 4x^{-1} + 2y^{-1}$

(f) $f(x,y) = (x^2 + \frac{3}{4})e^{-x^2-y^2}$

(g) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} + 1$

(h) $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$

(i) $f(x,y) = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$

(j) $f(x,y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$

(k) $f(x,y) = e^x(x^2 + 2y^2)$

Rešitev.

(a) Rešitev sistema

$$f_x(x,y) = 10x - 10 = 0 \quad \text{in} \quad f_y(x,y) = 4y - 10 = 0$$

je stacionarna točka $T(1, \frac{5}{2})$. Ker je $AC - B^2$ oziroma $\Delta(1, \frac{5}{2})$ v $T(1, \frac{5}{2}) > 0$ in $A = f_{xx}(1, \frac{5}{2}) = 10$, je v tej točki lokalni minimum funkcije.

(b) Rešitev sistema

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y = 0 \quad \text{in} \quad f_y(x,y) = 3y^2 - 3x = 0$$

sta stacionarni točki $T_0(1,1)$ in $T_1(0,0)$. S pomočjo drugih parcialnih odvodov $f_{xx}(x,y) = 6x$, $f_{xy}(x,y) = -3$ in $f_{yy}(x,y) = 6y$ izračunamo:

i. $\Delta(1,1) > 0$ in $f_{xx}(1,1) = 6$, kar pomeni, da je v točki $T_0(1,1)$ lokalni minimum,

ii. $\Delta(0,0) < 0$, kar pomeni, da v točki $T_1(0,0)$ ni lokalnega ekstrema.

(c) Rešitev sisitema

$$f_x(x,y) = 2x + y - 8 = 0 \quad \text{in} \quad f_y(x,y) = x + 2y - 4 = 0$$

je stacionarna točka $T(4,0)$. Ker je $f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{xy}(x,y) = 1$, $f_{yy}(x,y) = 2$, je $\Delta(4,0) > 0$. Iz tega sledi, da je v stacionarni točki $T(4,0)$ lokalni minimum funkcije.

(d) Rešitev sisitema

$$f_x(x,y) = e^x - 1 = 0 \quad \text{in} \quad f_y(x,y) = -y^{-1} + 2 = 0$$

je stacionarna točka $T(0,\frac{1}{2})$. S pomočjo parcialnih odvodov $f_{xx}(x,y) = e^x$, $f_{xy}(x,y) = 0$, $f_{yy}(x,y) = y^{-2}$ izračunamo $\Delta(0,\frac{1}{2}) > 0$, iz česar sledi, da je v stacionarni točki $T(0,\frac{1}{2})$ lokalni minimum funkcije.

(e) Ker je

$$f_x(x,y) = y - 4x^{-2} = 0 \quad \text{in} \quad f_y(x,y) = x - 2y^{-2} = 0,$$

je $y(1-y^3) = 0$, iz česar sledi, da je $T(2,1)$ stacionarna točka (zaradi definicijskega območja funkcije rešitev $y = 0$ ne upoštevamo). S pomočjo drugih parcialnih odvodov $f_{xx}(x,y) = 8x^{-3}$, $f_{xy}(x,y) = 1$, $f_{yy}(x,y) = 4y^{-3}$ izračunamo $\Delta(2,1) > 0$. Ker je $f_{xx}(2,1) = 1 > 0$, je v stacionarni točki $T(2,1)$ lokalni minimum funkcije.

(f) Rešitve sistema

$$f_x(x,y) = -2e^{-x^2-y^2}x(x^2-\frac{1}{4}) = 0 \quad \text{in} \quad f_y(x,y) = -2e^{-x^2-y^2}y(x^2+\frac{3}{4}) = 0$$

so tri stacionarne točke $T_1(0,0)$, $T_2(\frac{1}{2},0)$ in $T_3(-\frac{1}{2},0)$. S pomočjo drugih parcialnih odvodov

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= -e^{-x^2-y^2}(-4x^4 + 7x^2 - \frac{1}{2}),\\
f_{xy}(x,y) &= e^{-x^2-y^2}xy(4x^2-1),\\
f_{yy}(x,y) &= e^{-x^2-y^2}(x^2+\frac{3}{4})(4y^2-2)
\end{aligned}$$

izračunamo:

i. $\Delta(0,0) < 0$, torej v točki $T_1(0,0)$ ni ekstrema,
ii. $\Delta(\frac{1}{2},0) > 0$, v točki $T_2(\frac{1}{2},0)$ je lokalni maksimum,
iii. $\Delta(-\frac{1}{2},0) > 0$, v točki $T_3(-\frac{1}{2},0)$ je lokalni maksimum.

(g) Rešitev sistema

$$f_x(x,y) = -2e^{-(x^2+y^2)}x = 0 \quad \text{in} \quad f_y(x,y) = -2e^{-(x^2+y^2)}y = 0$$

je stacionarna točka $T(0,0)$. S pomočjo parcialnih odvodov $f_{xx}(x,y) = 2e^{-(x^2+y^2)}(2x^2-1)$, $f_{xy}(x,y) = 4xye^{-(x^2+y^2)}$ in $f_{yy}(x,y) = 2e^{-(x^2+y^2)}(2y^2-1)$ preverimo, da je $\Delta(0,0) > 0$. Ker je $f_{xx}(0,0) = -2 < 0$, je v stacionarni točki lokalni maksimum.

(h) Rešitvi sistema

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 6y - 39 = 0 \quad \text{in} \quad f_y(x,y) = 2y - 6x + 18 = 0$$

sta točki $T_1(1,-6)$ in $T_2(5,6)$. S pomočjo drugih parcialnih odvodov preverimo, da v točki $T_1(1,-6)$ ne nastopi ekstrem, v točki $T_2(5,6)$ pa je lokalni minimum.

(i) S pomočjo parcialnih odvodov funkcije pridemo do zaključka, da funkcija nima ekstrema.

(j) Rešitev sistema

$$f_x(x,y) = e^{\frac{x}{2}}(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y^2 + 1) = 0 \quad \text{in} \quad f_y(x,y) = 2e^{\frac{x}{2}}y = 0$$

je stacionarna točka $T(-2,0)$. S pomočjo drugih parcialnih odvodov funkcije preverimo, da je v tej točki lokalni minimum.

(k) Rešitev sistema

$$f_x(x,y) = e^x(x^2 + 2x + 2y^2) = 0 \quad \text{in} \quad f_y(x,y) = 4ye^x = 0$$

sta stacionarni točki $T_1(0,0)$ in $T_2(-2,0)$. V točki T_1 je lokalni minimum funkcije, v točki T_2 pa ni ekstrema.

Poglavje 5

Verjetnostni račun

5.1 Verjetnost slučajnega dogodka

1. Hkrati vržemo 2 (pošteni) igralni kocki. Izračunajte verjetnost, da je

   (a) vsota pik na obeh kockah je sodo število,

   (b) produkt pik na obeh kockah je večji od 7.

   Rešitev. Verjetnost računamo kot količnik $P = \frac{m}{n}$, kjer je n število vseh izidov in m število ugodnih izidov za dani dogodek. Pri metu dveh kock je število vseh izidov (to je parov $(1,1),(1,2),\ldots,(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)$) enako 36.

   (a) Število ugodnih izidov (vsota sodo število) je $m = 18$, verjetnost $P = \frac{18}{36}$.

   (b) Število ugodnih izidov (produkt večji od 7) je $m = 22$, verjetnost $P = \frac{22}{36}$.

2. V škatli imamo 15 kroglic, oštevilčenih od 1 do 15. Iz škatle (na slepo) potegnemo eno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da število na izbrani kroglici

   (a) ni večje od 12,

(b) je manjše od 5,

(c) ni večje od 15?

Rešitev. Izid je število i $(1 \leq i \leq 15)$ na izbrani kroglici, število izidov je $n = 15$.

(a) $m = 12, \quad P = \frac{12}{15}$

(b) $m = 5, \quad P = \frac{5}{15}$

(c) $m = 15, \quad P = \frac{15}{15} = 1$
Da bo število na izbrani kroglici kvečjemu 15 je gotov dogodek.

3. Na loteriji je 5000 listkov, vsak izmed njih stane 10 €. Eden izmed njih zadene 200 €, štirje po 100 €, 10 listkov zadene po 40 €, 20 po 20 €, 150 po 10 €in 300 po 2 €. Kolikšna je verjetnost, da z nakupom enega listka

(a) nimamo izgube,

(b) zaslužimo?

Rešitev. $n = 5000$ (število listkov).

(a) Število ugodnih izidov je število listkov, ki zadenejo vsaj 10 E, $m = 185$; $P = \frac{185}{5000}$

(b) Število ugodnih izidov je število listkov, ki zadenejo vsaj 20 E, $m = 35$; $P = \frac{35}{2500}$

4. V prvi škatli je 10 kroglic, oštevilčenih od 1 do 10; v drugi škatli je 10 kroglic, oštevilčenih od 11 do 20. Iz vsake škatle potegnemo po eno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da je vsota števil na izbranih kroglicah

(a) enaka 24,

(b) ni manjša od 12,

(c) ni večja od 20?

Rešitev. Možnih izidov (parov števil) je $n = 100$.

(a) $m = 7, \quad P = \frac{7}{100}$

(b) $m = 100, \quad P = 1$ (Gotovo je vsota vsaj 12.)

(c) $m = 5, \quad P = \frac{5}{25}$

5. V škatlici z zvečilnimi gumiji imamo 7 paketkov 'Softy', 9 paketkov 'Čunga-Lunga' in 4 paketke 'Bazooka' žvečilnih gumijev.

   (a) Izvlečemo eno paketek. Kolikšna je verjetnost, da smo izbrali 'Čunga-Lunga'?

   (b) Izvlečemo eno paketek. Kolikšna je verjetnost, da smo izbrali 'Čunga-Lunga' ali 'Softy'?

   (c) Izvlečemo dva paketeka. Kolikšna je verjetnost, da nismo izbrali 'Softy'?

   (d) Izvlečemo dva paketeka. Kolikšna je verjetnost, da smo izbrali kroglici 'Softy' in 'Bazooka'?

   (e) Izvlečemo tri paketke. Kolikšna je verjetnost, da smo izbrali 2 paketka 'Bazooka' in en paketek 'Čunga-Lunga' ?

   (f) Izvlečemo tri paketke. Kolikšna je verjetnost, da smo izbrali vsaj en paketek 'Softy'?

Opomba: Naloge so vzorčne. Tako kot paketke, lahko izbiramo karkoli (kar zahteva naloga), na primer: kroglice, zahtevane karte, študente, ki so opravili izpit z določeno oceno, kakovostne ali nekakovostne izdelke, ...

Rešitev.

(a) $n = 20, \quad m = 9, \quad P = \frac{9}{20}$

(b) $n = 20, \quad m = 9 + 7, \quad P = \frac{16}{20}$

(c) $n = \binom{20}{2}, \quad m = \binom{13}{2}, \quad P = \frac{39}{95}$

(d) $n = \binom{20}{2}, \quad m = 7 \cdot 4, \quad P = \frac{14}{95}$

(e) $n = \binom{20}{3}, \quad m = \binom{4}{2} \cdot 9, \quad P = \frac{9}{190}$

(f) Verjetnost nasprotnega dogodka (nobena izvlečen paketek ni 'Softy'):
$n = \binom{20}{3}, \quad m = \binom{13}{3}, \quad \bar{P} = \frac{143}{570}$
Verjetnost danega dogodka (vsaj ena izvlečena kroglica je bela):
$P = 1 - \bar{P} = \frac{427}{570}$

6. Izpit je opravljalo 90 študentov. 15 jih je opravilo izpit z oceno vsaj 8, 20 jih je dobilo oceno 7, 35 pa oceno 6. Kakšna je verjetnost, da trije naključno izbrani študentje niso opravili izpita?

Rešitev.

7. $n = \binom{90}{3}, \quad m = \binom{3}{20}, \quad P = \frac{19}{1958}$

5.2 Verjetnost vsote in produkta ter pogojna verjetnost

1. Verjetnost, da pri metu (nepoštene) igralne kocke pade šestica, je $\frac{1}{3}$; vsi ostali izidi (pade od 1 do 5 pik) so enako verjetni. Izračunajte verjetnost, da pri metu takšne kocke

   (a) padejo vsaj 3 pike,

   (b) pade število, ki je večkratnik števila 2 in 3.

   (c) pade število, ki je večkratnik števila 2 ali 3.

Rešitev. Označimo z D_i dogodek „pade i pik“.
Velja: $P(D_6) = \frac{1}{3}, \quad P(D_1) = P(D_2) = P(D_3) = P(D_4) = P(D_5) = \frac{2}{15}$.
Želeni dogodek je vsota nezdružljivih dogodkov.

(a) $P(D_3) + P(D_4) + P(D_5) + P(D_6) = \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{2}{15} = \frac{11}{15}$

(b) Število, ki je deljivo z dva in s tri je število šest. $P(D_6) = \frac{1}{3}$

(c) $P(D_2) + P(D_3) + P(D_4) + P(D_6) = 3\frac{2}{15} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$

2. Dvakrat zaporedoma vržemo (pošteno) igralno kocko. Izračunajte verjetnost,

   (a) nismo vrgli petice,

   (b) nismo vrgli niti dve niti tri.

   Rešitev. Želeni dogodek je produkt neodvisnih dogodkov.

   (a) $P = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

   (b) $P = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{36}$

3. Naključno izberemo število med 1 in 999. Kolikšna je verjetnost, da je izbrano število deljivo

   (a) s 4,

   (b) s 3 in s 4,

   (c) s 3 ali s 4,

   (d) s 3 ali s 4 ali s 5?

   Rešitev. Označimo z D_i dogodek „izbrano število je deljivo z i".

   (a) $P(D_4) = \frac{249}{999}$ (Število ugodnih je: $\frac{999}{4} = 249$)

   (b) $P(D_3 \cdot D_4) = P(D_{12}) = \frac{83}{999}$
   Dogodka nista neodvisna.

   (c) $P(D_3 + D_4) = P(D_3) + P(D_4) - P(D_3 \cdot D_4) = \frac{333}{999} + \frac{249}{999} - \frac{83}{999} = \frac{499}{999}$
   Dogodka nista nezdružljiva.

   (d) $P(D_3+D_4+D_5) = P(D_3)+P(D_4)+P(D_5)-P(D_3 \cdot D_4)-P(D_3 \cdot D_5)-$
   $- P(D_4 \cdot D_5) = \frac{333}{999} + \frac{249}{999} + \frac{199}{999} - \frac{83}{999} - \frac{66}{999} - \frac{49}{999} = \frac{583}{999}$

4. Prva škatla vsebuje 4 rdeče in 8 modrih krogel, v drugi škatli je 7 rdečih in 5 modrih krogel. Iz vsake škatle izvlečemo eno. Izračunajte verjetnost, da smo izvlekli

   (a) 2 modri krogli,

(b) krogli različnih barv,

(c) krogli iste barve.

Rešitev. Označimo dogodke:
R_1 „iz prve škatle smo izvlekli rdečo kroglo",
M_1 „iz prve škatle smo izvlekli modro kroglo",
R_2 „iz druge škatle smo izvlekli rdečo kroglo",
M_2 „iz druge škatle smo izvlekli modro kroglo".
Dogodki z indeksom 1 in 2 so medsebojno neodvisni.

(a) $P(M_1 \cdot M_2) = \frac{8}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{40}{144}$

(b) $P(R_1 \cdot M_2 + M_1 \cdot R_2) = \frac{4}{12} \cdot \frac{5}{12} + \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{76}{144}$

(c) $P(R_1 \cdot R_2 + M_1 \cdot M_2) = \frac{4}{12} \cdot \frac{7}{12} + \frac{8}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{68}{144}$

5. Verjetnost, da žarnica v določenem dnevu pregori, je 0.02. Izračunajte verjetnost,

(a) da bo žarnica gorela brez napake vsaj 50 dni,

(b) da bo žarnica pregorela 30 dan.

Rešitev. Označimo dogodke:
F_i „stroj se i-ti dan pokvari", $P(F_i) = \frac{2}{100}$,
$\bar{F}_i$ „stroj se i-ti dan ne pokvari", $P(\bar{F}_i) = \frac{98}{100}$.
Dogodka, ki se zgodita ob različnih dnevih, sta neodvisna.

(a) $P(\bar{F}_1\bar{F}_2\bar{F}_3 ... \bar{F}_{50}) = (\frac{98}{100})^{50}$

(b) $P(\bar{F}_1\bar{F}_2\bar{F}_3 ... \bar{F}_{27}F_{28}) = (\frac{98}{100})^{27} \cdot \frac{2}{100}$

6. Hkrati vržemo dve igralni kocki. Kolikšna je verjetnost,

(a) da na obeh kockah hkrati pade 5 pik,

(b) da na obeh kockah hkrati pade 5 pik, če vemo, da je vsota pik večja od 8,

(c) da je vsota pik na obeh kockah manjša od 8,

(d) da je vsota pik na obeh kockah manjša od 8, če vemo, da je na prvi kocki padlo manj kot 4 pike?

Rešitev. Označimo dogodke:
P_i $(P_{>i},\ P_{<i})$ „na prvi kocki pade i $(>i,\ <i)$ pik",
D_i $(D_{>i},\ D_{<i})$ „na drugi kocki pade i $(>i,\ <i)$ pik",
V_i $(V_{>i},\ V_{<i})$ „vsota pik je i $(>i,\ <i)$".
Dogodek na prvi kocki je neodvisen od dogodka na drugi kocki.

(a) $P(P_5D_5) = \frac{1}{36}$

(b) $P(P_5D_5/V_{>8}) = \frac{P(P_5D_5V_{>8})}{P(V_{>8})}$. Verjetnost, da na obeh kockah hkrati pade 5 pik in je vsota pik večja od 8 je: $P(P_5D_5V_{>8}) = \frac{1}{36}$. Verjetnost, da je vsota pik večja od 8 je: $P(V_{>8}) = \frac{10}{36}$ $P(P_5D_5/V_{>8}) = \frac{P(P_5D_5V_{>8})}{P(V_{>8})} = \frac{1}{10}$

(c) $P(V_{<8}) = \frac{21}{36}$

(d) $P(V_{<8}/P_{<4}) = \frac{P(V_{<8}P_{<4})}{P(P_{<4})}$ Verjetnost, da na prvi kocki pade manj kot 4 pike in je vsota pik manjša od 8 je: $P(V_{<8}P_{<4}) = \frac{15}{36}$. Verjetnost, da je vsota pik manjša od 8 je: $P(V_{<8}) = \frac{21}{36}$ $P(P_5D_5/V_{>8}) = \frac{P(P_5D_5V_{>8})}{P(V_{>8})} = \frac{15}{21}$

7. V škatli je 10 belih 6 rdečih in 4 črne kroglice. Hkrati izvlečemo iz škatle 2 kroglici. Kolikšna je verjetnost,

   (a) da sta obe izvlečeni kroglici rdeče barve, če vemo, da nobena ni bela,

   (b) da sta izvlečeni kroglici različnih barv, če vemo, da nobena ni bela,

Rešitev.

(a) Zaradi pogoja „nobena ni bela" lahko razmišljamo, kakor da bela kroglic ni v škatli.
$P = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{3}$

(b) $P = \frac{4 \cdot 6}{\binom{10}{2}} = \frac{8}{15}$

8. Verjetnost, da bo izdelek prvovrsten je 0.4; verjetnost, da bo neuporaben je 0.05. Izračunajte verjetnost, da bomo kupili

   (a) prvovrsten izdelek, če vemo, da je uporaben,

   (b) neuporaben izdelek, če vemo, da ni prvovrsten.

Rešitev. Označimo dogodke:
F „izdelek je prvovrsten", $P(F) = 0.4$,
U „izdelek je uporaben", $P(U) = 0.95$,
$\bar{U}$ „izdelek je neuporaben", $P(\bar{U}) = 0.05$.

(a) $P(F/U) = \frac{P(FU)}{P(U)} = \frac{P(F)}{P(U)} = 0,421$

(b) $P(\bar{U}/\bar{F}) = \frac{P(\bar{U}\bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{P(\bar{U})}{P(\bar{F})} = 0,083$

Literatura

[1] Bogataj L., Ferbar L.: Matematika I. Osnove, linerana algebra, funkcije. UL, EF, Ljubljana, 2005.

[2] Cedilnik, A.: Matematični priročnik. Didakta, Radovljica, 1997.

[3] Dolinar G., Demšar U.: Rešene naloge iz matematike I za VSP. Univerza v Ljubljani, Fakulteta za elektrotehniko, Ljubljana, 2004.

[4] Fošner M.: Matematične metode 1. Fakulteta za logistiko, Celje, 2010.

[5] Fošner M., Gorše M., Povh J., Pustavrh S., Zalar B.: Matematične metode v uporabi. DMFA (v pripravi).

[6] Fošner M., Zalar B.: Zbirka nalog iz uporabe matematičnih metod v logistiki I. Fakulteta za logistiko, Celje, 2008.

[7] Fošner M., Zmazek B., Žerovnik J.: Matematične metode v logistiki: zapiski predavanj. Fakulteta za logistiko, Celje, 2008.

[8] Jamnik R.: Matematika. DMFA, Ljubljana, 1994.

[9] Mencinger M.: Zbirka rešenih nalog iz matematične analize in algebre. Univerza v Mariboru, Fakulteta za gradbeništvo, Maribor, 2006.

[10] Mizori-Oblak P.: Matematika za študente tehnike in naravoslovja, 1.del. Univerza v Ljubljani, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2001.

[11] Usenik J.: Matematične metode v prometu. Univerza v ljubljani, Fakulteta za pomorstvo in promet, Portorož, 1998.

[12] Žerovnik J., Banič I., Hrastnik I., Špacapan S.: Zbirka rešenih nalog iz tehniške matematike, Univerza v Mariboru, Fakulteta za strojništvo, Maribor 2003