Univerza v Mariboru

Fakulteta za logistiko

Zbirka nalog iz uporabe matematičnih metod v logistiki 2

MAJA FOŠNER in BOJANA ZALAR

Celje 2010

Naslov: Zbirka nalog iz uporabe matematičnih metod v logistiki 2

Avtor: izred. prof. dr. Maja Fošner in dr. Bojana Zalar

Recenzent: doc. dr. Ajda Fošner

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51(075.8)(076.1)

FOŠNER, Maja
Zbirka nalog iz uporabe matematičnih metod v logistiki 2
[Elektronski vir] / Maja Fošner in Bojana Zalar. - El. knjiga. -
Celje : Fakulteta za logistiko, 2010

Način dostopa (URL): http: //fl.uni-mb.si/attachments/140_zbirka_nal
og_Fosner_Zalar.pdf

ISBN 978-961-6562-37-9
1. Zalar, Bojana
250141184

Kazalo

Poglavje 1

Odvod

1.1 Odvod, geometrijski pomen odvoda, približno računanje

1. Izračunajte odvode naslednjih funkcij:

   (a) $f(x) = 3x^3 - x + 2 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}$

   (b) $f(x) = \frac{x^3-2x+2}{x^2}$

   (c) $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - 2x\sqrt[4]{x}$

   (d) $f(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$

   (e) $f(x) = (x^3 + 3)\ln x$

   (f) $f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$

   (g) $f(x) = (2x^2 + 5x - 6)^{11}$

   (h) $f(x) = \frac{6}{\sqrt{(3-2x+x^2)^3}}$

   (i) $f(x) = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$

   (j) $f(x) = \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x}$

   (k) $f(x) = e^{2x}(x^2 - 2x + 2)$

   (l) $f(x) = x^{\sin x}$

   (m) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

Rešitev.

(a)
- funkcijo preoblikujemo: $f(x) = 3x^3 - x + 2 + x^{-1} - 2x^{-2}$
- odvajamo:

$$f'(x) = 3 \cdot 3x^{3-1} - 1 + 0 + (-1)x^{-1-1} - 2 \cdot (-2)x^{-2-1} =$$

$$= 9x^2 - 1 - x^{-2} + \frac{4}{x^3}$$

(b)
- funkcijo preoblikujemo: $f(x) = x - 2x^{-1} + 2x^{-2}$
- odvajamo:

$$f'(x) = 1 - 2 \cdot (-1)x^{-1-1} + 2 \cdot (-2)x^{-2-1} =$$

$$= 1 + 2x^{-2} - 4x^{-3}$$

(c)
- funkcijo preoblikujemo: $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{4}}$
- odvajamo:

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} - 2 \cdot \frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-1} =$$

$$= 2x^{-\frac{1}{3}} - \frac{5}{2}x^{\frac{1}{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - \frac{5}{2}\sqrt[4]{x}$$

(d)
- funkcijo preoblikujemo: $f(x) = x^{\frac{1}{8}}$
- odvajamo:

$$f'(x) = \frac{1}{8}x^{\frac{1}{8}-1} = \frac{1}{8}x^{-\frac{7}{8}}$$

(e) odvajamo kot produkt:

$$f'(x) = (x^3 + 3)' \ln x + (x^3 + 3)(\ln x)' = 3x^2 \ln x + (x^3 + 3)\frac{1}{x}$$

(f) odvajamo kot količnik:

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' e^x - \ln x (e^x)'}{e^{2x}} = \frac{\frac{1}{x}e^x - \ln x e^x}{e^{2x}} = \frac{1}{xe^x} - \frac{\ln x}{e^x}$$

(g) odvajamo kot posredno funkcijo

$$f'(x) = 11(2x^2 + 5x - 6)^{10}(2x^2 + 5x - 6)' = 11(2x^2 + 5x - 6)^{10}(4x + 5)$$

(h)
- funkcijo preoblikujemo: $f(x) = 6(3 - 2x + x^2)^{-\frac{3}{2}}$

- odvajamo kot posredno funkcijo:

$$f'(x) = 6 \cdot \frac{-3}{2}(3-2x+x^2)^{-\frac{3}{2}-1}(3-2x+x^2)' =$$

$$= 6 \cdot \frac{-3}{2}(3-2x+x^2)^{-\frac{5}{2}}(2x-2) = -18(3-2x+x^2)^{-\frac{5}{2}}(x-1)$$

(i)

$$f'(x) = \ln'(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(x^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{2}})' = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x(x+1)}}$$

(j)
- funkcijo preoblikujemo: $f(x) = x^{\frac{1}{2}} + \arctan(x^{\frac{1}{2}})$
- odvajamo:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+(x^{\frac{1}{2}})^2}(x^{\frac{1}{2}})' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(k) odvajamo kot produkt

$$f'(x) = (e^{2x})'(x^2-2x+2) + e^{2x}(x^2-2x+2)' =$$
$$= e^{2x}2(x^2-2x+2) + e^{2x}(2x-2) = 2e^{2x}(x^2-x+1)$$

(l)
- funkcijo preoblikujemo: $f(x) = e^{\ln x \cdot \sin x}$
- odvajamo kot posredno funkcijo:

$$f'(x) = e^{\ln x \cdot \sin x}(\ln x \cdot \sin x)' =$$

$$= e^{\ln x \cdot \sin x}(\frac{1}{x}\sin x + \ln x \cos x)$$

(m)
- funkcijo preoblikujemo: $f(x) = e^{\ln x \cdot x^{\frac{1}{2}}}$
- odvajamo kot posredno funkcijo:

$$f'(x) = e^{\ln x \cdot x^{\frac{1}{2}}}(\ln x \cdot x^{\frac{1}{2}})' =$$

$$= e^{\ln x \cdot x^{\frac{1}{2}}}(\frac{1}{x}x^{\frac{1}{2}} + \ln x \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}) =$$

$$= x^{\sqrt{x}}(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}})$$

2. Izračunajte odvode funkcij in vrednost odvoda v dani točki a:

   (a) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 6x - 7}, \quad a = -1$
   (b) $f(x) = \tan(-3x + 3), \quad a = 1$
   (c) $f(x) = \frac{x^3 + 2^x}{e^x}, \quad a = 0$
   (d) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}+1}, \quad a = 4$

Rešitev.

(a)

$$f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2 + 6x - 7)^{-\frac{2}{3}}(3x^2 + 6x - 7)' =$$
$$= \frac{1}{3}(3x^2 + 6x - 7)^{-\frac{2}{3}}(6x + 6)$$
$$f'(-1) = 0$$

(b)

$$f'(x) = \frac{1}{(\cos(-3x + 3))^2}(-3x + 3)' = \frac{-3}{(\cos(-3x + 3))^2}$$
$$f'(1) = -3$$

(c)

$$f'(x) = (3x^2 + \ln 2 \cdot 2^x)e^{-x} - (x^3 + 2^x)e^{-x}$$
$$f'(0) = \ln 2 - 1$$

(d)

$$f'(x) = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) - \sqrt{x^3}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} + 1)^2}$$
$$f'(4) = \frac{7}{9}$$

3. Preverite, da funkcija $f(x) = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2$ ustreza enačbi

$$(1 - x^2)f''(x) - xf'(x) = 1.$$

Opomba. Razumemo, da veljavnost enačbe preverjamo tam, kjer je funkcija f definirana in dvakrat odvedljiva, to je za $x \in (-1, 1)$.

Rešitev.

- Izračunamo prvi in drugi odvod funkcije f:
$$f'(x) = \frac{1}{2} 2 \arcsin x (\arcsin x)' = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$f''(x) = (\arcsin x)'(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + \arcsin x ((1-x^2)^{-\frac{1}{2}})' = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$
- Dobljena odvoda vstavimo v enačbo:
$$(1-x^2)\left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\right) - x \arcsin x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1,$$
preuredimo
$$1 + \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} - x \arcsin x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1$$
in vidimo, da je identično izpolnjena za vsak x z intervala $(-1, 1)$.

4. Pokažite, da se funkciji $f(x) = (\tan(2x))^2$ in $g(x) = \frac{1}{(\cos(2x))^2}$ na intervalu $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ razlikujeta le za konstanto. Izračunajte to konstanto.

Opomba. V tej nalogi z odvodi preverimo znano zvezo med kotnima funkcijama cos in tan: $\frac{1}{(\cos x)^2} = (\tan x)^2 + 1$.

Rešitev.

- Če imata funkciji f in g na nekem intervalu enaka odvoda, se na tem intervalu razlikujeta le za konstanto, torej $f(x) = g(x) + C$.
- Dani funkciji sta na intervalu $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ odvedljivi. Preverimo enakost njunih odvodov:
$$f'(x) = 2\tan(2x)\frac{1}{(\cos(2x))^2}2 = \frac{4(\sin(2x))^2}{(\cos(2x))^3}$$
$$g'(x) = -2(\cos(2x))^{-3}(-\sin(2x))2 = \frac{4(\sin(2x))^2}{(\cos(2x))^3}$$

- Konstanto C dobimo s primerjavo vrednosti funkcij f in g v eni izmed točki z danega intervala. Izberemo $x = 0$. Potem $f(0) = \tan 0 = 0$, $g(0) = \frac{1}{(\cos 0)^2} = 1$ in $f(x) = g(x) - 1$.

5. Zapišite enačbo tangente na krivuljo $y = x^2 - 5x + 12$ v točki z absciso $x = 5$.

Rešitev.

- Enačba tangente v točki (x_0, y_0) ima obliko $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$.
- $x_0 = 5, \quad y_0 = y(5) = 12$
- $y'(x) = 2x - 5, \quad y'(5) = 5$
- enačba iskane tangente: $y - 12 = 5(x - 5)$ ali $y = 5x - 13$.

6. Zapišite enačbi tangente in normale na graf funkcije $f(x) = \tan(2x)$ v koordinatnem izhodišču.

Rešitev.

- Enačbo tangente iščemo v obliki $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, enačbo normale v obliki $y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.
- $x_0 = 0, \quad y_0 = \tan 0 = 0$
- $f'(x) = \frac{1}{(\cos(2x))^2}2, \quad f'(0) = 2$
- enačba tangente: $y = 2x$
- enačba normale: $y = -\frac{1}{2}x$

7. Zapišite enačbi tangente in normale na graf funkcije $f(x) = e^{1-x^2}$ v točki z absciso $x_0 = 1$.

Rešitev.

- $x_0 = 1, \quad y_0 = f(1) = e^0 = 1$

- $f'(x) = e^{1-x^2}(-2x), \quad f'(1) = -2$
- enačba tangente: $y - 1 = -2(x-1)$ ali $y = -2x + 3$
- enačba normale: $y - 1 = \frac{1}{2}(x-1)$ ali $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

8. Določite tangento na parabolo $y = \frac{x^2-3x+3}{3}$, ki je vzporedna premici $y = x$.

Rešitev.

- Vzporedne premice imajo isti koeficient. Koeficient dane premice je 1, torej je tudi koeficient iskane tangente ($y'(x_0)$) enak 1.
- Iščemo točko x_0, ki ustreza $y'(x_0) = 1$: rešitev enačbe $y'(x) = \frac{2}{3}x - 1 = 1$ je $x_0 = 3$.
- iskana točka: $x_0 = 3, \quad y_0 = y(3) = 1$
- iskana tangenta: $y - 1 = x - 3$

9. Določite smerni koeficient k tako, da se bo premica $y = kx - 3$ dotikala parabole z enačbo $f(x) = x^2 + x - 2$ in izračunajte koordinati dotikališča.

Rešitev.

- Premica je tangenta dane parabole v točki, katere abscisa ustreza enačbama $y(x) = f(x)$ in $f'(x) = k$ ali $kx - 3 = x^2 + x - 2$ in $2x + 1 = k$.
- Gornji sistem ima 2 rešitvi: $x_1 = 1, \quad k_1 = 3$ in $x_2 = -1, \quad k_2 = -1$
- Če $k = k_1 = 3$, sta koordinati dotikališča $(1, 0)$ in enačba tangente $y = 3x - 3$. Če $k = k_2 = -1$, sta koordinati dotikališča $(-1, -2)$ in enačba tangente $y = -x - 3$.

10. Zapišite enačbo tangente na elipso z enačbo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ v točki (x_0, y_0).

Rešitev.

- Gornja polovica elipse je graf funkcije $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$
- $y'(x) = -\frac{b}{a^2}\frac{x}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$, $\quad y'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$
- Enačba tangente: $y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$ ali $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$
- Isto enačbo dobimo za spodnjo polovico elipse, če iščemo enačbo tangente na graf funkcije $y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ v točki (x_0, y_0).

11. Z uporabo L'Hospitalovega pravila izračunajte limite:

(a) $\lim_{x\to 6} \frac{\sqrt{x+3}-3}{\sqrt{2x+4}-4}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\sin x}{x^2}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin 2x)}$

(d) $\lim_{x\to\infty}(x^2 + 2x)e^{-x}$

(e) $\lim_{x\to 0} x^2 \ln x$

(f) $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x})$

(g) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

Rešitev.

(a) Če v ulomek vstavimo $x = 0$, dobimo nedoločen izraz $\frac{0}{0}$. Računamo: $\lim_{x\to 6} \frac{\sqrt{x+3}-3}{\sqrt{2x+4}-4} = \lim_{x\to 6} \frac{(\sqrt{x+3}-3)'}{(\sqrt{2x+4}-4)'} = \lim_{x\to 6} \frac{\sqrt{2x+4}}{2\sqrt{x+3}} = \frac{4}{6}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x \sin x+(1-e^x)\cos x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2e^x \cos x-\sin x}{2} = -1$

(c) Ulomek je oblike $\frac{\infty}{\infty}$.
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin 2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cos 3x}{2\cos 2x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{3}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x\cdot 2}{\cos 3x\cdot 3} = 1$

(d) Produkt $(x^2 + 2x)e^{-x}$ zapišemo kot ulomek $\frac{x^2+2x}{e^x}$, ki je oblike $\frac{\infty}{\infty}$.
$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{-2} = 0$

(f) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{x^{-1}} = -1$

(g) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1} e^{\ln x \frac{1}{1-x}} = e^{\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x}} = e^{-1}$

12. Z uporabo diferenciala ustrezne funkcije približno izračunajte vrednosti:

   (a) $\sqrt[3]{7.9}$

   (b) $\sin 29°$

Rešitev. Vrednost funkcije blizu kakšne „lepe“ točke a ocenimo z vrednostjo na tangenti funkcije skozi točko $(a, f(a))$; to je z uporabo formule $f(a+h) = f(a) + f'(a)h$.

   (a) $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad a = 8, \quad h = -0.1, \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \quad f(8) = 2, \quad f'(8) = \frac{1}{12}, \quad f(7.9) \approx 2 - 0.1\frac{1}{12}$

   (b) $f(x) = \sin x, \ a = \frac{\pi}{6}, \ h = -\frac{\pi}{180}, \ f'(x) = \cos x, \ f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}, \ f'(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f(\frac{\pi}{6}) \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180}$

13. Zapišite Taylorjev polinom tretje stopnje za funkcijo f v okolici dane točke a:

   (a) $f(x) = (2x^2 + 3x)e^{-x}, \quad a = 0$

   (b) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = -1$

   (c) $f(x) = x^3 \ln x, \quad a = 1$

Rešitev. Taylorjev polinom funkcije f stopnje n v okolici točke a je

$$T_f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

   (a) $f'(x) = (-2x^2 + x + 3)e^{-x}, \quad f''(x) = (2x^2 - 5x - 2)e^{-x}, \quad f'''(x) = (-2x^2 + 9x - 3)e^{-x}$
   $f(0) = 0, \quad f'(0) = 3, \quad f''(0) = -2, \quad f'''(0) = -3$
   $T_f(x) = 3x - x^2 - \frac{1}{2}x^3$

   (b) $T_f(x) = -1 - (x+1) - (x+1)^2 - (x+1)^3$

   (c) $T_f(x) = (x-1) + \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{6}(x-1)^3$

14. Dani polinom razvijte po potencah dvočlenika $(x-a)$, če je:

(a) $p(x) = x^3 - 7x^2 + 5x - 2, \quad a = -2$

(b) $p(x) = x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 7x - 1, \quad a = 1$

Rešitev. Polinom razviti po potencah dvočlenika $(x-a)$ pomeni zapisati ga kot njegov Taylorjev polinom (iste stopnje) v okolici točke a. Ostanek v Taylorjevi formuli je v tem primeru enak 0.

(a) $p'(x) = 3x^2 - 14x + 5, \quad p''(x) = 6x - 14, \quad p'''(x) = 6$
$p(-2) = -48, \quad p'(-2) = 45, \quad p''(-2) = -26, \quad p'''(-2) = 6$
$p(x) = T_p(x) = -48 + 45(x+2) - 13(x+2)^2 + (x+2)^3$

(b) $p(x) = T_p(x) = -8(x-1) - 11(x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4$

1.2 Analiza funkcij

1. Poiščite in klasificirajte stacionarne točke funkcij:

(a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

(b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Rešitev. Stacionarne točke funkcije f so rešitve enačbe $f'(x) = 0$. V stacionarni točki x_0 je lokalni maksimum, če je $f''(x_0) < 0$. V stacionarni točki x_0 je lokalni minimum, če je $f''(x_0) > 0$.

(a)
- $f'(x) = 6x^2 - 6x, \quad f''(x) = 12x - 6$
- stacionarni točki: $x_1 = 0, \quad x_2 = 1$
- $f''(x_1) = -6 < 0$, v točki x_1 je lokalni maksimum
  $f''(x_2) = 6 > 0$, v točki x_1 je lokalni minimum

(b)
- $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{-2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$
- stacionarni točki: $x_1 = -1, \quad x_2 = 1$
- $f''(x_1) = \frac{1}{2} > 0$, v točki x_1 je lokalni minimum
  $f''(x_2) = \frac{-1}{2} < 0$, v točki x_1 je lokalni maksimum

2. Poiščite intervale naraščanja in padanja naslednjih funkcij:

   (a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

   (b) $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x^2}$

Rešitev. Funkcija f narašča, kjer je $f'(x) > 0$ in pada, kjer je $f'(x) < 0$.

(a)
- $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$
- stacionarni točki: $x_1 = 1, \quad x_2 = -1$
- $f'(x) > 0: \quad (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ interval naraščanja
  $f'(x) < 0: \quad (-1, 0) \cup (0, 1)$ interval padanja (Opomba: funkcija v točki 0 ni definirana)

(b)
- $f'(x) = e^{-x^2} 2x(4 - x^2)$
- stacionarne točke: $x_1 = 0, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 2$
- $f'(x) > 0: \quad (-\infty, -2) \cup (0, 2)$ interval naraščanja
  $f'(x) < 0: \quad (-2, 0) \cup (2, \infty)$ interval padanja

3. Poiščite ekstreme funkcije $f(x) = xe^{-x}$ in zapišite intervale, kjer je funkcija naraščajoča in kjer padajoča.

Rešitev.

- $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$
  $f''(x) = -e^{-x}(1 - x) - e^{-x} = e^{-x}(x - 2)$
- stacionarna točka: $x_1 = 1$
  $f''(1) = -e^{-1} < 0$, v točki x_1 je lokalni maksimum
- interval naraščanja: $f'(x) > 0$: $x < 1$ ali $(-\infty, 1)$
  interval padanja: $f'(x) < 0$: $x > 1$ ali $(1, \infty)$

4. Poiščite intervale konveksnosti in konkavnosti naslednjih funkcij:

   (a) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 27$

   (b) $f(x) = x^2 + \ln x^2$

Rešitev. Funkcija f je konveksna, kjer je $f''(x) > 0$ in konkavna, kjer je $f''(x) < 0$. Prevoji so tiste ničle drugega odvoda, v katerih ta spremeni predznak.

(a)
- $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 36x, \quad f''(x) = 12x^2 - 24x - 36$
- prevoja: $x_1 = 3, \quad x_2 = -1$
- $f''(x) > 0: \quad (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$ interval konveksnosti
  $f'(x) < 0: \quad (-1, 3)$ interval konkavnosti

(b)
- $f'(x) = 2x + \frac{2}{x}, \quad f''(x) = 2 - \frac{2}{x^2}$
- prevoja: $x_1 = 1, \quad x_2 = -1$
- $f''(x) > 0: \quad (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ interval konveksnosti
  $f'(x) < 0: \quad (-1, 0) \cup (0, 1)$ interval konkavnosti (Opomba: funkcija v točki $x = 0$ ni definirana)

5. Za vsako od danih funkcij določite

- definicijsko območje, obnašanje funkcije na robu definicijskega območja
- ničle, intervale pozitivnosti in negativnosti
- ekstreme, intervale naraščanja in padanja
- prevoje, intervale konveksnosti in konkavnosti

ter skicirajte njen graf:

(a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

(b) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$

(c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$

(d) $f(x) = (2x - 1)e^{4x+5}$

(e) $f(x) = x(\ln x)^2$

(f) $f(x) = \ln(100 - x^2)$

Rešitev.

(a)

- $D_f = \mathbb{R}$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- $f(x) = 0:$ $x_{1,2} = -2$, $x_3 = 2$ ničle
  $f(x) > 0:$ $(2, \infty)$ interval pozitivnosti
  $f(x) < 0:$ $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ interval negativnosti
- $f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$, $f''(x) = 6x + 4$
  $f'(x) = 0:$ $x_4 = -2$, $x_5 = \frac{2}{3}$ stacionarni točki
  $f''(x_4) = -8 < 0$, v točki x_4 je lokalni maksimum
  $f''(x_5) = 8 > 0$, v točki x_5 je lokalni minimum
  $f'(x) > 0:$ $(-\infty, -2) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$ interval naraščanja
  $f'(x) < 0:$ $(-2, \frac{2}{3})$ interval padanja
- $f''(x) = 0:$ $x_6 = -\frac{2}{3}$ prevoj
  $f''(x) > 0:$ $(-\frac{2}{3}, \infty)$ interval konveksnosti
  $f''(x) < 0:$ $(-\infty, -\frac{2}{3})$ interval konkavnosti

(b)

- $D_f = [0, 2]$, $f(0) = 0$, $f(2) = 0$
- $f(x) = 0:$ $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ ničli
  $f(x) > 0:$ $(0, 2)$ interval pozitivnosti
  Funkcija ni nikjer negativna.
- $f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, $f''(x) = \frac{-1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}$
  $f'(x) = 0:$ $x_3 = 1$ stacionarna točka
  $f''(x_3) = -1 < 0$, v točki x_3 je lokalni maksimum
  $f'(x) > 0:$ $(0, 1)$ interval naraščanja
  $f'(x) < 0:$ $(1, 2)$ interval padanja
- $f''(x) = 0$: enačba nima rešitev, funkcija nima prevojev
  $f''(x) < 0$: povsod v notranjosti definicijskega območja, funkcija je povsod konkavna

(c)

- $D_f = \mathbb{R} \setminus 0$, definicijsko območje racionalne funkcije je realna os brez polov, to je ničel imenovalca.
  $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$,
  $\lim_{x\to 0^+} = -\infty$, $\lim_{x\to 0^-} = \infty$
- $f(x) = 0:$ $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ ničli
  $f(x) > 0:$ $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ interval pozitivnosti
  $f(x) < 0:$ $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ interval negativnosti
- $f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{-2}{x^3}$
  $f'(x) = 0$ enačba nima rešitev, funkcija nima stacionarnih točk.
  $f'(x) > 0$ povsod na definicijskem območju, funkcija povsod na definicijskem območju narašča

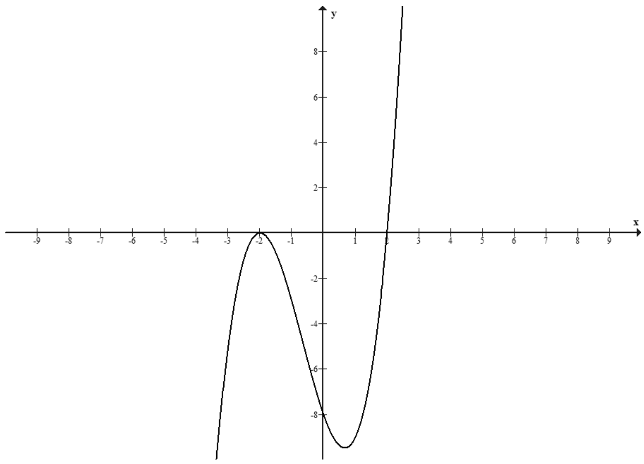
- $f''(x) = 0$: enačba nima rešitev, funkcija nima prevojev, drugi odvod spremeni predznak v polu
  $f''(x) > 0: \quad (-\infty, 0)$ interval konveksnosti
  $f''(x) < 0: \quad (0, \infty)$ interval konkavnosti

(d)
- $D_f = \mathbb{R}, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- $f(x) = 0: \quad x_1 = \frac{1}{2}$ ničla
  $f(x) > 0: \quad (\frac{1}{2}, \infty)$ interval pozitivnosti
  $f(x) < 0: \quad (-\infty, \frac{1}{2})$ interval negativnosti
- $f'(x) = (8x-2)e^{4x+5}, \quad f''(x) = 32xe^{4x+5}$
  $f'(x) = 0: \quad x_2 = \frac{1}{4}$ stacionarna točka
  $f''(x_2) = 8e^6 > 0$, v točki x_2 je lokalni minimum
  $f'(x) > 0: \quad (\frac{1}{4}, \infty)$ interval naraščanja
  $f'(x) < 0: \quad (-\infty, \frac{1}{4})$ interval padanja
- $f''(x) = 0: \quad x_3 = 0$ prevoj
  $f''(x) > 0: \quad (0, \infty)$ interval konveksnosti
  $f''(x) < 0: \quad (-\infty, 0)$ interval konkavnosti

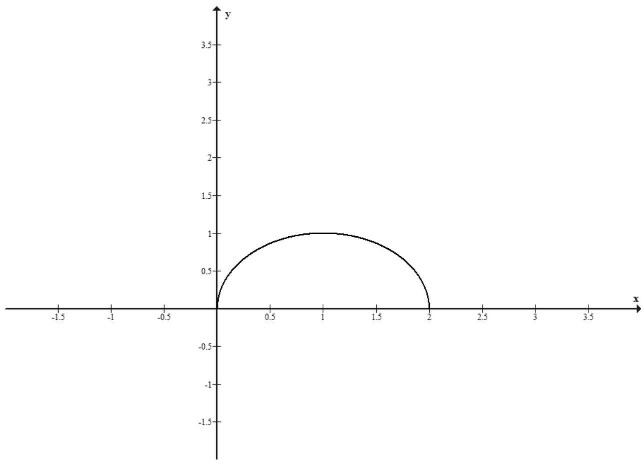
(e)
- $D_f = (0, \infty), \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- $f(x) = 0: \quad x_1 = 1$ ničla
  $f(x) > 0: \quad (0, 1) \cup (1, \infty)$ interval pozitivnosti
  Funkcija ni nikjer negativna
- $f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x, \quad f''(x) = \frac{2(\ln x + 1)}{x}$
  $f'(x) = 0: \quad x_2 = e^{-2}, \quad x_3 = 1$ stacionarni točki
  $f''(x_2) = -\frac{2}{e^{-2}} < 0$, v točki x_2 je lokalni maksimum
  $f''(x_3) = 2 > 0$, v točki x_3 je lokalni minimum
  $f'(x) > 0: \quad (0, e^{-2}) \cup (1, \infty)$ interval naraščanja
  $f'(x) < 0: \quad (e^{-2}, 1)$ interval padanja
- $f''(x) = 0: \quad x_4 = e^{-1}$ prevoj
  $f''(x) > 0: \quad (e^{-1}, \infty)$ interval konveksnosti
  $f''(x) < 0: \quad (0, e^{-1})$ interval konkavnosti

(f)
- $D_f = (-10, 10), \quad \lim_{x\to-10} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 10} f(x) = -\infty$
- $f(x) = 0: \quad x_1 = -\sqrt{99}, \quad x_2 = \sqrt{99}$ ničli
  $f(x) > 0: \quad (-\sqrt{99}, \sqrt{99})$ interval pozitivnosti
  $f(x) < 0: \quad (-10, -\sqrt{99}) \cup (\sqrt{99}, 10)$ interval negativnosti
- $f'(x) = \frac{-2x}{100-x^2}, \quad f''(x) = \frac{-200-2x^2}{(100-x^2)^2}$
  $f'(x) = 0: \quad x_3 = 0$ stacionarna točka
  $f''(x_3) = -\frac{2}{100} < 0$, v točki x_3 je lokalni maksimum
  $f'(x) > 0: \quad (-10, 0)$ interval naraščanja
  $f'(x) < 0: \quad (0, 10)$ interval padanja

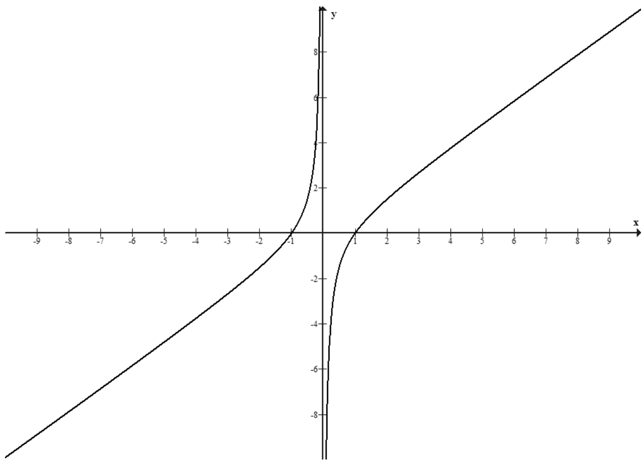
- $f''(x) = 0$: enačba nima rešitev, funkcija nima prevojev
  $f''(x) < 0$ povsod na definicijskem območju, funkcija je povsod konkavna



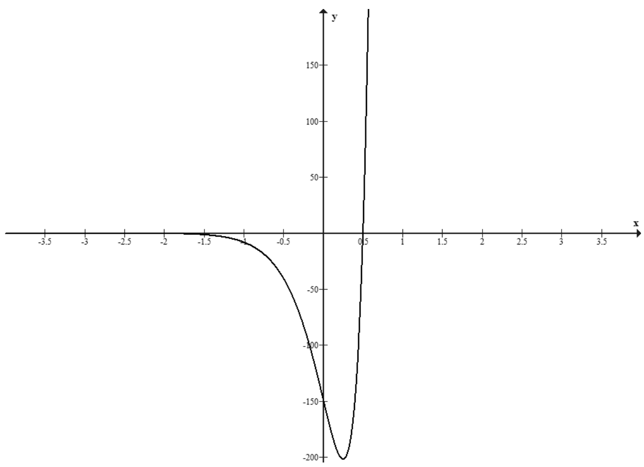
Slika 1.1: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$



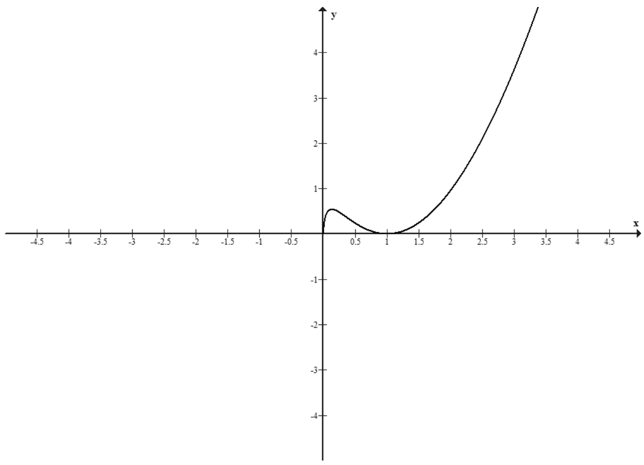
Slika 1.2: $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$



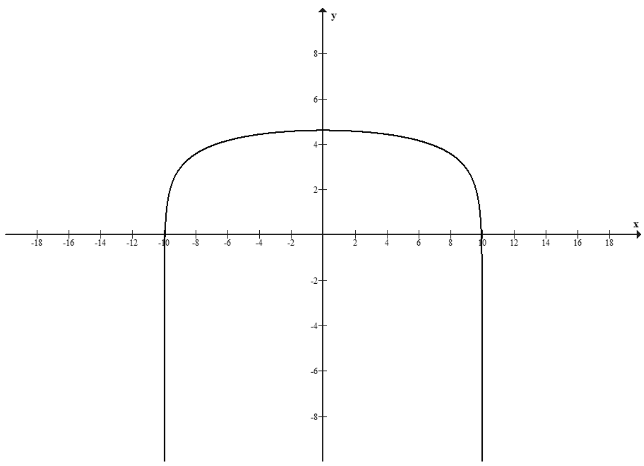
Slika 1.3: $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$



Slika 1.4: $f(x) = (2x-1)e^{4x+5}$



Slika 1.5: $f(x) = x(\ln x)^2$



Slika 1.6: $f(x) = \ln(100 - x^2)$

1.3 Optimizacijske naloge

1. Poiščite največjo in najmanjšo vrednost funkcije f na danem intervalu:

   (a) $f(x) = \frac{5}{1+x^2}, \quad [-1, 2]$

   (b) $f(x) = \frac{x^3}{x+1}, \quad [1, \infty)$

   (c) $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 3), \quad [-2, 20]$

   (d) $f(x) = \sqrt{100 - x^2}, \quad [-6, 8]$

Rešitev. Odvedljiva funkcija na danem (zaprtem) intervalu doseže največjo in najmanjšo vrednost bodisi znotraj intervala v stacionarni točki bodisi v krajiščih intervala. Postopek iskanja največje in najmanjše vrednosti:

- Poiščemo stacionarne točke znotraj intervala.
- Izračunamo funkcijske vrednosti v teh stacionarnih točkah.
- Izračunamo funkcijski vrednosti v krajiščih intervala.
- Med izračunanimi funkcijskimi vrednostmi izberemo največjo ($f_{\max}$) in najmanjšo ($f_{\min}$).

(a) $f'(x) = \frac{-10x}{(1+x^2)^2}$
stacionarna točka: $x_1 = 0; \quad f(0) = 5$
$f(-1) = \frac{5}{2}, \quad f(2) = 1$
$f_{\max} = f(0) = 5, \quad f_{\min} = f(2) = 1$

(b) $f'(x) = \frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2}$
Funkcija nima stacionarnih točk na intervalu $[1, \infty)$.
$f(1) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (Če je dani interval odprt, funkcijsko vrednost nadomestimo z limito.)
$f_{\max}$ ne obstaja, $f_{\min} = f(1) = \frac{1}{2}$

(c) $f'(x) = \frac{2(x+1)}{x^2+2x+3}$
stacionarna točka: $x_1 = -1; \quad f(-1) = \ln 2$
$f(-2) = \ln 3, \quad f(20) = \ln 443$
$f_{\max} = f(20) = \ln 443, \quad f_{\min} = f(-1) = \ln 2$

(d) $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{100-x^2}}$
stacionarna točka: $x_1 = 0$; $f(0) = 10$
$f(-6) = 8$, $f(8) = 6$
$f_{\max} = f(0) = 10$, $f_{\min} = f(8) = 6$

2. Na osi x poiščite takšno točko X, da bo vsota kvadratov oddaljenosti te točke do dveh danih točk $A(0,3)$ in $B(4,5)$ minimalna.

Rešitev. Vsota kvadratov oddaljenosti točke $X(x,0)$ od točk $A(0,3)$ in $B(4,5)$ je $F(x) = x^2 + 9 + (x-4)^2 + 25$. Iščemo najmanjšo vrednost (globalni minimum) funkcije $F(x) = x^2 + 9 + (x-4)^2 + 25$ na celi realni osi:
$F'(x) = 2x + 2(x-4)$,
stacionarna točka: $x_0 = 1$,
v točki $x_0 = 1$ je lokalni in globalni minimum funkcije F.

3. Poiščite mere bazena s kvadratnim dnom in prostornino $32m^3$, da bomo za obdelavo njegovih sten porabili najmanj materiala.

Rešitev. Stranica kvadrata (dna) naj bo a, globina bazena b. Potem je volumen bazena $V = a^2b = 32$ in $b = \frac{V}{a^2}$. Površina sten bazena je $a^2 + 4ab = a^2 + \frac{4V}{a}$. Iščemo najmanjšo vrednost funkcije $F(a) = a^2 + \frac{4V}{a}$ na intervalu $(0,\infty)$. V točki $a = 4$ je lokalni in globalni minimum funkcije F. Mere bazena so: stranica kvadratnega dna $4m$, globina $2m$.

4. Poiščite največji člen zaporedja, podanega s splošnim členom $a_n = \frac{n^2}{n^3+200}$.

Rešitev.

- Poiščemo največjo vrednost funkcije $f(x) = \frac{x^2}{x^3+200}$ na intervalu $[1,\infty)$. Ta je v točki $x_0 = \sqrt[3]{400}$.
- Ker je $7 < \sqrt[3]{400} < 8$, izračunamo $a_7 = \frac{49}{543}$ in $a_8 = \frac{8}{89}$. Največji člen je $a_7 = \frac{49}{543}$.

5. Neznano količino x smo izmerili n-krat in dobili vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Pri kateri vrednosti x-a bo vsota kvadratov napak

$$f(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \cdots + (x - x_n)^2$$

najmanjša?

Rešitev. Iščemo najmanjšo vrednost (globalni minimum) funkcije f na celi realni osi. V stacionarni točki $x_0 = \frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}$ je lokalni in hkrati globalni minimum funkcije f.

Poglavje 2

Integral

2.1 Nedoločeni integral

1. Izračunajte nedoločene integrale:

   (a) $\int (x^8 + 2)dx$

   (b) $\int (2x^5 + 7x - 3)dx$

   (c) $\int (3\sqrt{x} - 5)dx$

   (d) $\int (\frac{3x^5 - 7x}{x})dx$

   (e) $\int (x\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^7})dx$

   (f) $\int \frac{2x^3 - 3}{\sqrt[5]{x^7}}dx$

   Rešitev.

   (a) $\int (x^8 + 2)dx = \int x^8 dx + \int 2dx = \frac{x^9}{9} + 2x + C$

   (b) $\int (2x^5 + 7x - 3)dx = \int 2x^5 dx + \int 7x dx - \int 3dx = 2\int x^5 dx + 7\int x dx - 3\int dx = \frac{x^6}{3} + \frac{7x^2}{2} - 3x + C$

   (c) $\int (3\sqrt{x} - 5)dx = 3\int x^{\frac{1}{2}} dx - 5\int dx = 3x^{\frac{3}{2}} - 5x + C$

   (d) $\int (\frac{3x^5 - 7x}{x})dx = \int (\frac{3x^5}{x} - \frac{7x}{x})dx = \int (3x^4 - 7)dx = \frac{3x^5}{5} - 7x + C$

   (e) $\int (x\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^7})dx = \int (xx^{\frac{2}{3}} + 2x^{-7})dx = \int (x^{\frac{5}{3}} + 2x^{-7})dx = \frac{3x^{\frac{8}{3}}}{8} - \frac{x^{-6}}{3} + C$

(f) $\int \frac{(2x^3-3)dx}{\sqrt[5]{x^7}} = \int \frac{2x^3dx}{\sqrt[5]{x^7}} - \int \frac{3dx}{\sqrt[5]{x^7}} = \int \frac{2x^3dx}{x^{\frac{7}{5}}} - \int \frac{3dx}{x^{\frac{7}{5}}} = \int 2x^{\frac{8}{5}}dx - \int 3x^{\frac{-7}{5}}dx = \frac{10}{13}x^{\frac{13}{5}} + \frac{15}{2}x^{\frac{-2}{5}} + C$

2. Z uvedbo nove neznanke izračunajte nedoločene integrale:

(a) $\int (3x+5)^{100}dx$

(b) $\int \frac{dx}{4x-7}$

(c) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{6x-5}}$

(d) $\int e^{5x+3}dx$

(e) $\int 2xe^{x^2+4}dx$

(f) $\int 3x\cos(3x^2-1)dx$

(g) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

(h) $\int \frac{\ln^5 x}{2x}dx$

(i) $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}$

(j) $\int \frac{dx}{x^2+5x+6}$

Rešitev.

(a) Nova neznanka je $t = 3x+5$, $dt = 3dx$. Torej je $\int (3x+5)^{100}dx = \frac{1}{3}\int t^{100}dt = \frac{1}{303}t^{101} + C = \frac{1}{303}(3x+5)^{101} + C$

(b) Nova neznanka je $t = 4x-7$, $dt = 4dx$. Iz tega sledi $\int \frac{dx}{4x-7} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\int t^{-1}dt = \frac{1}{4}\ln|t| + C = \frac{1}{4}\ln|4x-7| + C$

(c) Nova neznanka je $t = 6x-5$, $dt = 6dx$. Potem je $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{6x-5}} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{6}\int t^{\frac{-1}{5}}dt = \frac{5}{24}t^{\frac{4}{5}} + C = \frac{5}{24}(6x-5)^{\frac{4}{5}} + C$

(d) Nova neznanka je $t = 5x+3$, $dt = 5dx$. Potem je $\int e^{5x+3}dx = \frac{1}{5}\int e^t dt = \frac{1}{5}e^t + C = \frac{1}{5}e^{5x+3} + C$

(e) Nova neznanka je $t = x^2+4$, $dt = 2xdx$. Iz tega sledi $\int 2xe^{x^2+4}dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{x^2+4} + C$

(f) Nova neznanka je $t = 3x^2-1$, $dt = 6xdx$. Iz tega sledi, da je $\int 3x\cos(3x^2-1)dx = \frac{1}{2}\int \cos(t)dt = \frac{1}{2}\sin t + C = \frac{1}{2}\sin(3x^2-1) + C$

(g) Nova neznanka je $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$. Potem je $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$

(h) Nova neznanka je $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$. Potem je $\int \frac{\ln^5 x}{2x} dx = \int \frac{1}{2} t^5 dt = \frac{t^6}{12} + C = \frac{\ln^6 x}{12} + C$

(i) Najprej zapišimo ulomek $\frac{1}{(x+1)(x-2)}$ kot vsoto dveh ulomkov, torej $\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$. Pomnožimo enakost z izrazom $(x+1)(x-2)$. Potem je $1 = A(x-2) + B(x+1)$, iz česar sledi $A + B = 0$ in $-2A + B = 1$. Rešimo sistem: $A = \frac{-1}{3}$, $B = \frac{1}{3}$. Iz tega sledi $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{3} \int \frac{-dx}{x+1} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-2} = -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{3} \ln|x-2| + C = \frac{1}{3} \ln|\frac{x-2}{x+1}| + C$

(j) Kot v prejšnjem primeru zapišemo $\frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+2}$. Ko pomnožmo zapisano enakost z izrazom $x^2 + 5x + 6$, je $1 = A(x+2) + B(x+3)$. Torej je $A + B = 0$ in $2A + 3B = 1$. Rešitev tega sistema je $B = 1$ in $A = -1$. Iz tega sledi, da je $\int \frac{dx}{x^2+5x+6} = \int \frac{-dx}{x+3} + \int \frac{dx}{x+2} = -\ln(x+3) + \ln(x+2) + C = \ln|\frac{x+2}{x+3}| + C$

3. Z metodo per partes izračunajte nedoločene integrale:

(a) $\int xe^x dx$

(b) $\int (5x+7)e^{3x+2} dx$

(c) $\int (x+1) \cos x$

(d) $\int (x-5) \sin x dx$

(e) $\int \ln(2x) dx$

(f) $\int (x+2) \ln x dx$

Rešitev. Integriranje po delih:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

(a) Vpeljemo $u = x$ in $dv = e^x$. Potem je $du = dx$ ter $v = e^x$. Torej je $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

(b) Vpeljemo $u = 5x + 7$ in $dv = e^{3x+2}$. Potem je $du = 5dx$ in $v = \frac{1}{3} e^{3x+2}$. Iz tega sledi $\int (5x+7)e^{3x+2} dx = \frac{1}{3}(5x+7)e^{3x+2} - \int \frac{5}{3} e^{3x+2} dx = \frac{1}{3}(5x+7)e^{3x+2} - \frac{5}{9} e^{3x+2} + C$

(c) Uvedemo $u = x+1$ in $dv = \cos x$ ter izračunamo $du = dx$, $v = \sin x$. Potem je $\int (x+1) \cos x = (x+1) \sin x - \int \sin x dx = (x+1) \sin x + \cos x dx + C$

(d) Uvedemo $u = x - 5$, $dv = \sin x$ in izračunamo $du = dx$ ter $v = -\cos x$. Iz tega sledi $\int (x-5)\sin x dx = -(x-5)\cos x + \int cosx dx = -(x-5)\cos x + \sin x + C$

(e) Uvedemo $u = \ln(2x)$, $dv = dx$ in izračunamo $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$. Potem je $\int \ln(2x)dx = x\ln(2x) - \int \frac{xdx}{x} = x\ln(2x) - \int dx = x\ln(2x) - x + C$

(f) Uvedemo $u = \ln x$, $dv = x+2$ in izračunamo $du = \frac{dx}{x}$ ter $v = \frac{x^2}{2}+2x$. Potem je $\int (x+2)\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int (\frac{x^2}{2} + 2x)\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int (\frac{x}{2} + 2)dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} - 2x + C$

2.2 Določeni integral

1. Izračunajte določene integrale.

(a) $\int_0^1 (x^2+5)dx$

(b) $\int_1^3 (\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + x - 2)dx$

(c) $\int_1^2 (e^x + 7)dx$

(d) $\int_0^\pi \sin x dx$

(e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$

Rešitev.

(a) $\int_0^1 (x^2+5)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 5dx = \frac{x^3}{3}|_0^1 + 5x|_0^1 = \frac{1}{3} + 5 = \frac{16}{3}$

(b) $\int_1^3 (\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + x - 2)dx = \int_1^3 (x^{\frac{-2}{3}} + x - 2)dx = (3x^{\frac{1}{3}} + \frac{x^2}{2} - 2x)|_1^3 = (3\cdot 3^{\frac{1}{3}} + \frac{9}{2} - 6) - (3 + \frac{1}{2} - 2) = 3^{\frac{4}{3}} - 3$

(c) $\int_1^2 (e^x + 7)dx = (e^x + 7x)|_1^2 = e^2 + 14 - (e+7) = e^2 - e + 7$

(d) $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x|_0^\pi = 2$

(e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

2. Z uvedbo nove neznanke izračunajte določene integrale.

   (a) $\int_0^1 \sqrt{x+1}dx$

   (b) $\int_1^2 \frac{xdx}{(x^2-3)^2}$

   (c) $\int_0^1 (2x+1)^5 dx$

   (d) $\int_0^1 e^{7x-3}dx$

   (e) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx$

   (f) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+7x+12}$

Rešitev.

(a) V določeni integral vpeljemo novo spremenljivko $t = x+1$, $dt = dx$. Meji za spremenljivko t sta:

- spodnja meja: ko je $x = 0$, je $t = 1$
- zgornja meja: ko je $x = 1$, je $t = 2$.

Od tod sledi $\int_0^1 \sqrt{x+1}dx = \int_1^2 \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}(\sqrt{8}-1)$.

(b) Vpeljemo novo spremenljivko $t = x^2 - 3$, $dt = 2xdx$. Potem je $\int_1^2 \frac{xdx}{(x^2-3)^2} = \frac{1}{2}\int_{-2}^1 \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\int_{-2}^1 t^{-2}dt = -\frac{1}{2}t^{-1}|_{-2}^1 = -\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$

(c) Vpeljemo novo spremenljivko $t = 2x+1$, $dt = 2dx$. Torej je $\int_0^1 (2x+1)^5 dx = \frac{1}{2}\int_1^3 t^5 dx = \frac{1}{12}t^6|_1^3 = \frac{1}{12}(3^6-1) = \frac{182}{3}$

(d) Uvedemo novo spremenljivko $t = 7x-3$, $dt = 7dx$. Iz tega sledi $\int_0^1 e^{7x-3}dx = \frac{1}{7}\int_{-3}^4 e^t dt = \frac{1}{7}e^t|_{-3}^4 = \frac{1}{7}(e^4 - e^{-3})$

(e) Nova spremenljivka je $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$. Potem je $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}|_0^1 = \frac{1}{3}$

(f) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+7x+12} = 2\ln 5 - \ln 4 - \ln 6$

3. Z metodo per partes izračunajte določene integrale.

   (a) $\int_0^1 (3x+1)e^{2x}dx$

   (b) $\int_1^e 3\ln x dx$

   (c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 2x dx$

Rešitev. Integriranje po delih:

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu.$$

(a) Vpeljemo $u = 3x + 1$ in $dv = e^{2x}$. Potem je $du = 3dx$ in $v = \frac{1}{2}e^{2x}$. Sledi $\int_0^1 (3x+1)e^{2x} = \frac{1}{2}(3x+1)e^{2x}|_0^1 - \int_0^1 \frac{3}{2}e^{2x}dx = 2e^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}e^{2x}|_0^1 = 2e^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}e^2 + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$

(b) Uvedemo $u = \ln x$, $dv = dx$. Potem je $du = \frac{dx}{x}$ in $v = x$. Sledi $\int_1^e 3\ln x dx = x \ln x|_1^e - \int_1^e dx = e - x|_1^e = e + 1$

(c) Uvedemo $u = x$, $dv = \cos 2x$. Sledi $du = dx$ in $v = \frac{1}{2}\sin 2x$. Torej je $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = \frac{1}{2}x \sin 2x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin 2x dx = \frac{1}{4}\cos 2x|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}(-1-1) = -\frac{1}{2}$

4. Izračunajte posplošene integrale.

(a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$

(b) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^5}}$

(c) $\int_0^\infty e^{-x}dx$.

(d) $\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$

Rešitev.

(a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-3}dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{x^{-2}}{2}|_1^b = \lim_{b\to\infty}(-\frac{b^{-2}}{2} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

(b) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^5}} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x^5}} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-\frac{5}{2}}dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}|_1^b = \lim_{b\to\infty} -\frac{2}{3}b^{-\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

(c) $\int_0^\infty e^{-x} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}(-e^{-x})|_0^b = \lim_{b\to\infty}(-e^{-b} + 1) = 1$.

(d) Najprej izračunajmo integral $\int xe^{-x^2}dx$. Vpeljemo novo spremenljivko $-x^2 = t$ in $-2xdx = dt$. Potem je

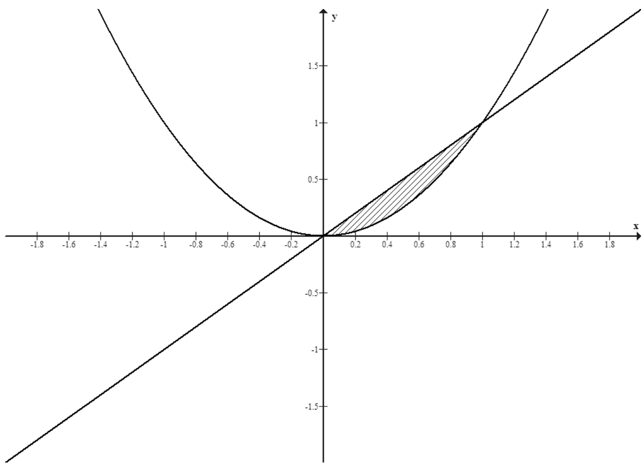
$$\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

Iz tega sledi

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{-x^2}dx$$
$$= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}e^{-x^2}|_0^b = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{2}(e^{-b^2}-1) = \frac{1}{2}.$$

2.3 Uporaba integrala

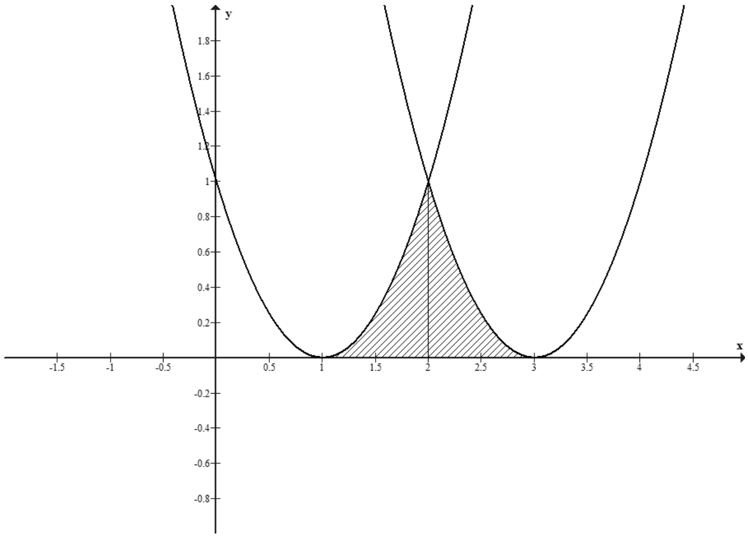
1. Izračunajte ploščino lika, omejenega s funkcijami $f(x) = x$ in $g(x) = x^2$.



Slika 2.1: $f(x) = x$, $g(x) = x^2$

Rešitev. Ker sta $x_1 = 0$ in $x_2 = 1$ rešitvi enačbe $x = x^2$, je ploščina lika $\int_0^1 (x - x^2)dx = (\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

2. Izračunajte ploščino lika, omejenega s funkcijami $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$ in $y = 0$.

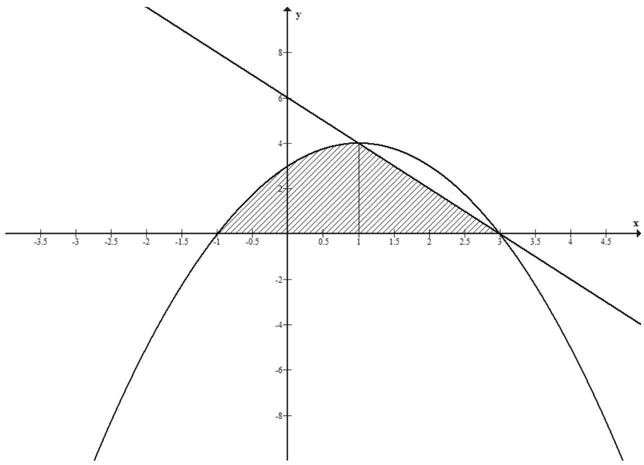


Slika 2.2: $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$

Rešitev. Ker je presečišče funkcij $x = 2$, je ploščna lika

$$\begin{aligned}
\text{pl} &= \int_1^2 (x^2 - 2x + 1)dx + \int_2^3 (x^2 - 6x + 9)dx \\
&= (\frac{x^3}{3} - x^2 + x)|_1^2 + (\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x)|_2^3 \\
&= (\frac{8}{3} - 4 + 2) - (\frac{1}{3} - 1 + 1) \\
&+ (9 - 27 + 27) - (\frac{8}{3} - 12 + 18) = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

3. Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujejo os x ter funkciji $y = -x^2+2x+3$ in $y = -2x + 6$.

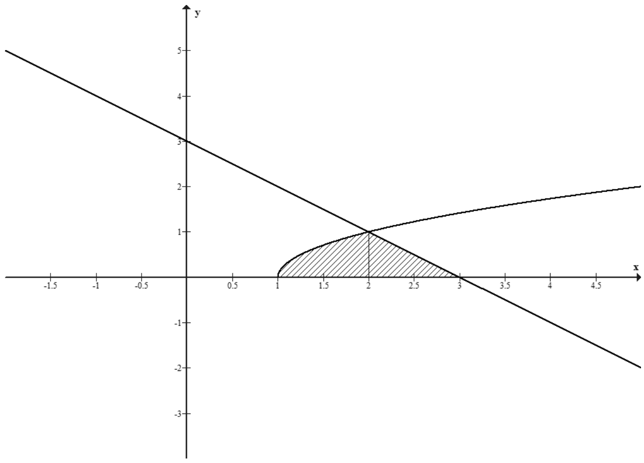


Slika 2.3: $y = -x^2 + 2x + 3$, $y = -2x + 6$

Rešitev. Iz enakosti $-x^2 + 2x + 3 = -2x + 6$ sledi $(x-3)(x-1) = 0$, kar pomeni, da je presečišče funkcij v točkah $x = 3$ in $x = 1$. Torej je ploščina lika

$$\text{pl} = \int_{-1}^{1} (-x^2 + 2x + 3)dx + \int_{1}^{3} (-2x + 6)dx = \frac{28}{3}.$$

4. Izračunajte ploščino lika, omejenega s funkcijami $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = -x + 3$ in $y = 0$.



Slika 2.4: $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = -x+3$

Rešitev. Najprej narišemo grafa funkcij $f(x)$ in $g(x)$ in poiščemo presečišče funkcij. To pomeni, da enakost $\sqrt{x-1} = -x+3$ kvadriramo in dobimo $x-1 = x^2-6x+9$ oziroma $0 = x^2-7x+10$. Iz tega sledi $(x-5)(x-2) = 0$, kar pomeni, da je presečišče funkcij v točki $x = 2$. Torej je ploščina lika

$$\text{pl} = \int_1^2 \sqrt{x-1}dx + \int_2^3 (-x+3)dx.$$

Vpeljemo $t = x-1$, $dt = dx$. Torej je $\int_1^2 \sqrt{x-1}dx = \int_0^1 t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}|_0^1 = \frac{2}{3}$. Izračunajmo še $\int_2^3(-x+3)dx = (-\frac{1}{2}x^2+3x)|_2^3 = -\frac{9}{2}+9-(-2+6) = \frac{1}{2}$. Iz tega sledi, da je

$$\text{pl} = \int_1^2 \sqrt{x-1}dx + \int_2^3 (-x+3)dx = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}.$$

5. Rešite diferencialne enačbe:

   (a) $y' = x^2 + 3$

   (b) $2y'x = y$

   (c) $y'(x^2+3)^3 = 2x$

   (d) $y'x = \ln^5 x$

   (e) $y'(x+5)(-x+4) = y$

Rešitev.

(a) Ker je $\frac{dy}{dx} = x^2 + 3$, je $dy = (x^2 + 3)dx$ in zato $\int dy = \int (x^2 + 3)dx$. Iz tega sledi, da je $y = \frac{x^3}{3} + 3x + C$.

(b) Vidimo, da je $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x}$ in zato $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{2x}$. Potem je $\ln y = \ln x^{\frac{1}{2}} + \ln C$, kar pomeni, da je $\ln y = \ln Cx^{\frac{1}{2}}$. Torej je $y = Cx^{\frac{1}{2}}$.

(c) Ker je $\frac{dy}{dx}(x^2+3)^3 = 2x$ je $dy = \frac{2x}{(x^2+3)^3}dx$. Vpeljemo novo neznanko $t = x^2 + 3$, $dt = 2xdx$. Potem je $\int \frac{2x}{(x^2+3)^3}dx = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3}dt = -\frac{t^{-2}}{2} + C = -\frac{(x^2+3)^{-2}}{2} + C$. Iz tega sledi, da je rešitev diferencialne enačbe $y = -\frac{(x^2+3)^{-2}}{2} + C$.

(d) Ker je $\frac{dy}{dx}x = \ln^5 x$ je $dy = \frac{\ln^5 x}{x}dx$. Izračunajmo integral $\int \frac{\ln^5 x}{x}dx$. Vpeljemo novo neznanko $t = \ln x$, $dt = \frac{dx}{x}$. Torej je $\int \frac{\ln^5 x}{x}dx = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\ln^6 x}{6} + C$. Iz tega sledi, da je rešitev diferencialne enačbe $y = \frac{\ln^6 x}{6} + C$.

(e) Rešitev enakosti $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{(x+5)(-x+4)}$ je $\ln y = \frac{1}{9}\ln(x+5) - \frac{1}{9}\ln(-x+4) + \ln C$ oziroma zapisano drugače $y = C(\frac{x+5}{-x+4})^{\frac{1}{9}}$.

6. Poiščite tiste rešitve diferencialnih enačb, ki zadoščajo danim pogojem:

(a) $y - y'x = 2y'$, $y(1) = 1$

(b) $y'e^{-5x} = x + 3$, $y(0) = 1$

(c) $y' = x\cos(3x)$, $y(\frac{\pi}{3}) = 0$

Rešitev.

(a) Vidimo, da je $y'(x+2) = y$ in zato $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+2}$. Iz tega sledi, da je $\ln y = \ln(x+2) + \ln C$. Torej je $y = C(x+2)$. Ker je podan pogoj $y(1) = 1$, je $1 = 3C$ in zato $C = \frac{1}{3}$. Rešitev je $y = \frac{1}{3}(x+2)$.

(b) Ni težko preveriti, da je $y' = (x+3)e^{5x}$ in zato $dy = (x+3)e^{5x}dx$. Z metodo per partes izračunamo integral $\int (x+3)e^{5x}dx$. Uvedemo $u = x + 3$ in $dv = e^{5x}$. Potem je $du = dx$ in $v = \frac{1}{5}e^{5x}$. Sledi $\int (x+3)e^{5x}dx = \frac{1}{5}(x+3)e^{5x} - \int \frac{1}{5}e^{5x}dx = \frac{1}{5}(x+3)e^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x} + C$. Splošna rešitev diferencialne enačbe je $y = \frac{1}{5}(x+3)e^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x} + C$.

Glede na podan pogoj $y(0) = 1$ je $1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{25} + C$ oziroma $1 = \frac{19}{25} + C$. Torej je $C = \frac{6}{25}$. Rešitev naloge je $y = \frac{1}{5}(x+3)e^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x} + \frac{6}{25}$.

(c) Ker je $\int dy = \int x\cos(3x)dx$, bomo $\int x\cos(3x)dx$ izračunali s pomočjo delnega integriranja. Uvedemo $u = x$, $dv = \cos(3x)$ in zato $du = dx$, $v = \frac{1}{3}\sin(3x)$. Torej je $\int x\cos(3x)dx = \frac{1}{3}x\sin(3x) - \int \frac{1}{3}\sin(3x)dx = \frac{1}{3}x\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C$. Splošna rešitev diferencialne enačbe je $y = \frac{1}{3}x\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C$. Ker je dan pogoj $y(\frac{\pi}{3}) = 0$, je $0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{3}\sin(\pi) + \frac{1}{9}\cos(\pi) + C$ oziroma $0 = -\frac{1}{9} + C$. Iz tega sledi, da je $C = \frac{1}{9}$. Rešitev naloge je $y = \frac{1}{3}x\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + \frac{1}{9}$.

Poglavje 3

Verjetnostni račun

3.1 Verjetnost slučajnega dogodka

1. Hkrati vržemo 2 (pošteni) igralni kocki. Izračunajte verjetnost, da je

   (a) vsota pik na obeh kockah enaka 6,

   (b) produkt pik na obeh kockah manjši od 6.

   Rešitev. Verjetnost računamo kot količnik $P = \frac{m}{n}$, kjer je n število vseh izidov in m število ugodnih izidov za dani dogodek. Pri metu dveh kock je število vseh izidov (to je parov $(1,1),(1,2),\ldots,(2,1),(2,2),\ldots,(6,6)$) enako 36.

   (a) Število ugodnih izidov (vsota 6) je $m = 5$, verjetnost $P = \frac{5}{36}$.

   (b) Število ugodnih izidov (produkt manjši od 6) je $m = 10$, verjetnost $P = \frac{10}{36}$.

2. V škatli imamo 10 kroglic, oštevilčenih od 1 do 10. Iz škatle (na slepo) potegnemo eno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da število na izbrani kroglici

   (a) ni večje od 6,

   (b) je manjše od 10,

(c) ni večje od 10?

Rešitev. Izid je število i $(1 \leq i \leq 10)$ na izbrani kroglici, število izidov je $n = 10$.

(a) $m = 6, \quad P = \frac{6}{10}$

(b) $m = 9, \quad P = \frac{9}{10}$

(c) $m = 10, \quad P = 1$
Da bo število na izbrani kroglici kvečjemu 10 je gotov dogodek.

3. Na loteriji je 2500 listkov, vsak izmed njih stane 10 E. Eden izmed njih zadene 100 E, štirje po 50 E, 10 listkov zadene po 20 E, 20 po 10 E, 150 po 5 E in 400 po 1 E. Kolikšna je verjetnost, da z nakupom enega listka

   (a) nimamo izgube,

   (b) zaslužimo?

Rešitev. $n = 2500$ (število listkov).

(a) Število ugodnih izidov je število listkov, ki zadenejo vsaj 10 E, $m = 35$; $P = \frac{35}{2500}$

(b) Število ugodnih izidov je število listkov, ki zadenejo vsaj 20 E, $m = 15$; $P = \frac{15}{2500}$

4. V prvi škatli je 5 kroglic, oštevilčenih od 1 do 5; v drugi škatli je 5 kroglic, oštevilčenih od 6 do 10. Iz vsake škatle potegnemo po eno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da je vsota števil na izbranih kroglicah

   (a) enaka 11,

   (b) ni manjša od 7,

   (c) ni večja od 11?

Rešitev. Možnih izidov (parov števil) je $n = 25$.

(a) $m = 5, \quad P = \frac{5}{25}$

(b) $m = 25, \quad P = 1$ (Gotovo je vsota vsaj 7.)

(c) $m = 15, \quad P = \frac{15}{25}$

5. V škatli je 5 belih 6 rdečih in 4 črne kroglice.

   (a) Izvlečemo eno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da smo izbrali rdečo?

   (b) Izvlečemo eno kroglico. Kolikšna je verjetnost, da smo izbrali kroglico rdeče ali črne barve?

   (c) Izvlečemo dve kroglici. Kolikšna je verjetnost, da nismo izbrali bele?

   (d) Izvlečemo dve kroglici. Kolikšna je verjetnost, da smo izbrali kroglici rdeče in črne barve?

   (e) Izvlečemo tri kroglice. Kolikšna je verjetnost, da smo izbrali 2 rdeči in eno belo?

   (f) Izvlečemo tri kroglice. Kolikšna je verjetnost, da smo izbrali vsaj eno belo?

Opomba: Naloge s kroglicami so vzorčne. Tako kot kroglice izbiramo karkoli (kar zahteva naloga), na primer: zahtevane karte, študente, ki so opravili izpit z določeno oceno, kakovostne ali nekakovostne izdelke, ...

Rešitev.

(a) $n = 15, \quad m = 6, \quad P = \frac{6}{15}$

(b) $n = 15, \quad m = 6 + 4, \quad P = \frac{10}{15}$

(c) $n = \binom{15}{2}, \quad m = \binom{10}{2}, \quad P = \frac{3}{7}$

(d) $n = \binom{15}{2}, \quad m = 6 \cdot 4, \quad P = \frac{8}{35}$

(e) $n = \binom{15}{3}, \quad m = \binom{6}{2} \cdot 5, \quad P = \frac{15}{91}$

(f) Verjetnost nasprotnega dogodka (nobena izvlečena kroglica ni bela): $n = \binom{15}{3}, \quad m = \binom{10}{3}, \quad \bar{P} = \frac{24}{91}$
Verjetnost danega dogodka (vsaj ena izvlečena kroglica je bela): $P = 1 - \bar{P} = \frac{67}{91}$

6. Izpit je opravljalo 30 študentov. 15 jih je opravilo izpit z oceno vsaj 7, 10 jih je dobilo oceno 6. Kakšna je verjetnost, da trije naključno izbrani študentje niso opravili izpita?

Rešitev.

7. $n = \binom{30}{3}, \quad m = \binom{5}{3}, \quad P = \frac{1}{406}$

3.2 Verjetnost vsote, verjetnost produkta in pogojna verjetnost

1. Verjetnost, da pri metu (nepoštene) igralne kocke pade šestica, je $\frac{1}{2}$; vsi ostali izidi (pade od 1 do 5 pik) so enako verjetni. Izračunajte verjetnost, da pri metu takšne kocke

   (a) padejo vsaj 4 pike,

   (b) pade število, ki je večkratnik števila 2 ali 3.

Rešitev. Označimo z D_i dogodek „pade i pik".
Velja: $P(D_6) = \frac{1}{2}, \quad P(D_1) = P(D_2) = P(D_3) = P(D_4) = P(D_5) = \frac{1}{10}$.
Želeni dogodek je vsota nezdružljivih dogodkov.

(a) $P(D_4) + P(D_5) + P(D_6) = \frac{1}{2} + \frac{2}{10}$

(b) $P(D_2) + P(D_3) + P(D_4) + P(D_6) = \frac{1}{2} + \frac{3}{10}$

2. Dvakrat zaporedoma vržemo (pošteno) igralno kocko. Izračunajte verjetnost,

   (a) nismo vrgli šestice,

   (b) nismo vrgli niti šestice niti enke.

Rešitev. Želeni dogodek je produkt neodvisnih dogodkov.

(a) $P = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

(b) $P = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{36}$

3. Naključno izberemo število med 1 in 99. Kolikšna je verjetnost, da je izbrano število deljivo

   (a) s 3,

   (b) s 3 in s 5,

   (c) s 3 ali s 5,

   (d) s 3 ali s 5 ali s 7?

Rešitev. Označimo z D_i dogodek „izbrano število je deljivo z i“.

(a) $P(D_3) = \frac{1}{3}$

(b) $P(D_3 \cdot D_5) = P(D_{15}) = \frac{6}{99}$
Dogodka nista neodvisna.

(c) $P(D_3 + D_5) = P(D_3) + P(D_5) - P(D_3 \cdot D_5) = \frac{1}{3} + \frac{19}{99} - \frac{6}{99} = \frac{46}{99}$
Dogodka nista nezdružljiva.

(d) $P(D_3+D_5+D_7) = P(D_3)+P(D_5)+P(D_7)-P(D_3 \cdot D_5)-P(D_3 \cdot D_7)-$
$- P(D_7 \cdot D_5) = \frac{1}{3} + \frac{19}{99} + \frac{14}{99} - \frac{6}{99} - \frac{4}{99} - \frac{2}{99} = \frac{54}{99}$

4. Prva škatla vsebuje 2 beli in 10 črnih krogel, v drugi škatli je 8 belih in 4 črne krogle. Iz vsake škatle izvlečemo eno. Izračunajte verjetnost, da smo izvlekli

   (a) 2 beli krogli,

   (b) krogli različnih barv,

   (c) krogli iste barve.

Rešitev. Označimo dogodke:
B_1 „iz prve škatle smo izvlekli belo kroglo",
C_1 „iz prve škatle smo izvlekli črno kroglo",
B_2 „iz druge škatle smo izvlekli belo kroglo",
C_2 „iz druge škatle smo izvlekli črno kroglo".
Dogodki z indeksom 1 in 2 so medsebojno neodvisni.

(a) $P(B_1 \cdot B_2) = \frac{2}{12} \cdot \frac{8}{12} = \frac{16}{144}$

(b) $P(B_1 \cdot C_2 + C_1 \cdot B_2) = \frac{2}{12} \cdot \frac{4}{12} + \frac{10}{12} \cdot \frac{8}{12} = \frac{88}{144}$

(c) $P(B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2) = \frac{2}{12} \cdot \frac{8}{12} + \frac{10}{12} \cdot \frac{4}{12} = \frac{56}{144}$

5. Verjetnost, da se stroj v določenem dnevu pokvari, je 0.1. Izračunajte verjetnost,

   (a) da bo stroj deloval brez napake vsaj 4 dni,

   (b) da se bo stroj pokvaril peti dan.

Rešitev. Označimo dogodke:
F_i „stroj se i-ti dan pokvari", $P(F_i) = \frac{1}{10}$,
$\bar{F}_i$ „stroj se i-ti dan ne pokvari", $P(\bar{F}_i) = \frac{9}{10}$.
Dogodka, ki se zgodita ob različnih dnevih, sta neodvisna.

(a) $P(\bar{F}_1\bar{F}_2\bar{F}_3\bar{F}_4) = (\frac{9}{10})^4$

(b) $P(\bar{F}_1\bar{F}_2\bar{F}_3\bar{F}_4F_5) = (\frac{9}{10})^4 \cdot \frac{1}{10}$

6. Hkrati vržemo dve igralni kocki. Kolikšna je verjetnost,

   (a) da na obeh kockah hkrati pade 6 pik,

   (b) da na obeh kockah hkrati pade 6 pik, če vemo, da je vsota pik večja od 10,

   (c) da je vsota pik na obeh kockah manjša od 7,

   (d) da je vsota pik na obeh kockah manjša od 7, če vemo, da je na prvi kocki padlo manj kot 5 pik?

Rešitev. Označimo dogodke:
$P_i \ \ (P_{>i}, \ \ P_{<i})$ „na prvi kocki pade $i \ \ (> i, \ \ < i)$ pik",
$D_i \ \ (D_{>i}, \ \ D_{<i})$ „na drugi kocki pade $i \ \ (> i, \ \ < i)$ pik",
$V_i \ \ (V_{>i}, \ \ V_{<i})$ „vsota pik je $i \ \ (> i, \ \ < i)$".
Dogodek na prvi kocki je neodvisen od dogodka na drugi kocki.

(a) $P(P_6 D_6) = \frac{1}{36}$
(b) $P(P_6 D_6 / V_{>10}) = \frac{P(P_6 D_6 V_{>10})}{P(V_{>10})} = \frac{1}{3}$
(c) $P(V_{<7}) = \frac{15}{36}$
(d) $P(V_{<7}/P_{<5}) = \frac{P(V_{<7} P_{<5})}{P(P_{<5})} = \frac{14}{24}$

7. V škatli je 5 belih 6 rdečih in 4 črne kroglice. Hkrati izvlečemo iz škatle 2 kroglici. Kolikšna je verjetnost,

   (a) da sta obe izvlečeni kroglici bele barve, če vemo, da nobena ni črna,
   (b) da sta izvlečeni kroglici različnih barv, če vemo, da nobena ni črna,

Rešitev.

(a) Zaradi pogoja „nobena ni črna" lahko razmišljamo, kakor da črnih kroglic ni v škatli.
$P = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{2}{11}$
(b) $P = \frac{5 \cdot 6}{\binom{11}{2}} = \frac{6}{11}$

8. Verjetnost, da bo izdelek prvovrsten je 0.3; verjetnost, da bo neuporaben je 0.1. Izračunajte verjetnost, da bomo kupili

   (a) prvovrsten izdelek, če vemo, da je uporaben,
   (b) neuporaben izdelek, če vemo, da ni prvovrsten.

Rešitev. Označimo dogodke:
F „izdelek je prvovrsten", $P(F) = 0.3$,
U „izdelek je uporaben", $P(U) = 0.9$,
$\bar{U}$ „izdelek je neuporaben", $P(\bar{U}) = 0.1$.

(a) $P(F/U) = \frac{P(FU)}{P(U)} = \frac{P(F)}{P(U)} = \frac{1}{3}$

(b) $P(\bar{U}/\bar{F}) = \frac{P(\bar{U}\bar{F})}{P(\bar{F})} = \frac{P(\bar{U})}{P(\bar{F})} = \frac{1}{7}$