Univerza v Mariboru
Fakulteta za logistiko

Uporaba matematičnih metod v logistiki 2

Priročnik

BOJANA ZALAR

Celje 2009

Izdala: Fakulteta za logistiko Univerze v Mariboru

Naslov: Uporaba matematičnih metod v logistiki 2, Priročnik

Avtor: dr. Bojana Zalar

Recenzent: doc. dr. Maja Fošner

CIP - Katanožni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51(035)(0.034.2)

Zalar, Bojana
Uporaba matematičnih metod v logistiki 2
[Elektronski vir]: priročnik / Bojana Zalar. - El. knjiga. - Celje :
Fakulteta za logistiko, 2009

Način dostopa (URL): http: //fl.uni-mb.si/attachments/140_Priročnik_umml2.pdf

ISBN 978-961-6562-30-0

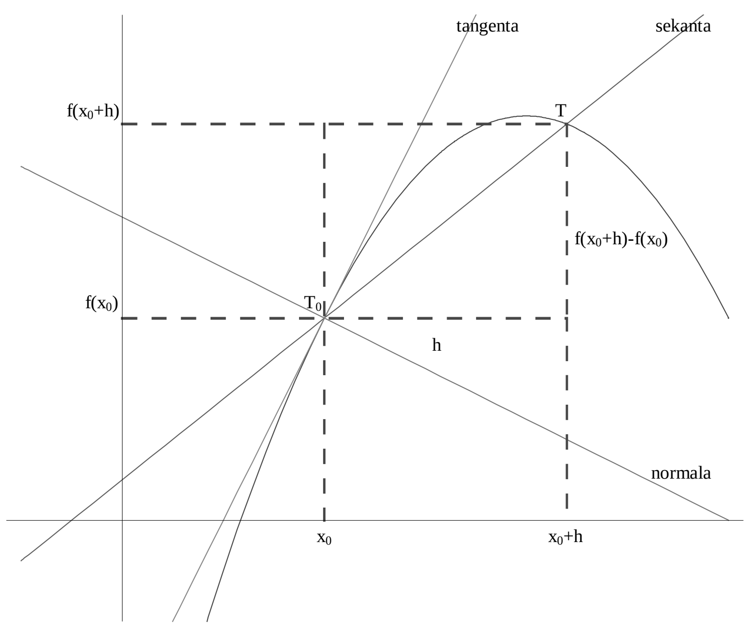
246000896

Kazalo

Poglavje 1

Odvod

1.1 Definicija in geometrijski pomen



Slika 1.1: K definiciji odvoda

Oznake:

- $\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0)$ sprememba funkcijske vrednosti
- $\Delta x = h$ sprememba neodvisne spremenljivke
- $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ diferenčni količnik

Definicija: Odvod funkcije f v točki x_0 (oznaka $f'(x_0)$) je limita diferenčnega količnika, ko gre h proti 0:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Opomba: Kadar gornja limita ne obstaja ali kadar ni končno število, funkcija f v točki x_0 ni odvedljiva.

Geometrijski pomen:

- Enačba sekante skozi točki $T_0(x_0, f(x_0))$ in $T(x_0+h, f(x_0+h))$:

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$$

- Diferenčni količnik $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ je smerni koeficient sekante skozi točki $T_0(x_0, f(x_0))$ in $T(x_0+h, f(x_0+h))$.
- Ko $h \to 0$, potem $T \to T_0$ in sekanta preide v tangento na graf fnkcije v točki $(x_0, f(x_0))$.
- $f'(x_0)$ je smerni koeficient tangente na graf funkcije f v točki z absciso x_0.
- Enačba tangente na graf funkcije f v točki z absciso x_0:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

- Enačba normale na graf funkcije f v točki z absciso x_0:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Kako po grafu spoznamo odvedljivo funkcijo?

- Funkcija ima v vsaki točki (samo eno) tangento. Graf ni lomljena krivulja.
- Tangenta ni navpična.

Definicija:

- Desni odvod funkcije f v točki x_0 je
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$
Enakovredni zapisi: $\lim_{h\to 0^+}$, $\lim_{h\downarrow 0}$, $\lim_{h\to 0+0}$

- Levi odvod funkcije f v točki x_0 je
$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$
Enakovredni zapisi: $\lim_{h\to 0^-}$, $\lim_{h\uparrow 0}$, $\lim_{h\to 0-0}$

- Funkcija f je odvedljiva na odprtem intervalu (a,b), če je odvedljiva v vsaki točki tega intervala.

- Funkcija f je odvedljiva na zaprtem intervalu $[a,b]$, če je odvedljiva na odprtem intervalu (a,b), ima v točki $x=a$ desni odvod in v točki $x=b$ levi odvod.

Izrek: Če je funkcija f v točki $x_0 \in D_f$ odvedljiva, je v točki x_0 zvezna.

Opomba: Obrat ne velja. Zvezna funkcija ni nujno odvedljiva. Protiprimer je funkcija $f(x)=|x|$.

1.2 Pravila odvajanja

1. Odvod konstante $f(x) = C$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 0, \quad \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

$$C' = 0$$

2. Odvod identične funkcije $f(x) = x$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = 1, \quad \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

$$x' = 1$$

3. Odvod vsote funkcij $f(x) + g(x)$:

$$\frac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = f'(x) + g'(x)$$

Enako velja za razliko funkcij.
Krajši zapis:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

4. Odvod produkta funkcij $f(x) \cdot g(x)$:

$$\frac{\Delta(f \cdot g)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Posebni primer - odvod funkcije Cf (C konstanta):

$$(Cf)' = Cf'$$

5. Odvod kvocienta funkcij $\frac{f(x)}{g(x)}$:

$$\frac{\Delta(\frac{f}{g})}{\Delta x} = \frac{(f(x+h)-f(x))g(x)-f(x)(g(x+h)-g(x))}{hg(x+h)g(x)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))g(x)-f(x)(g(x+h)-g(x))}{hg(x+h)g(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$$

6. Odvod posredne funkcije $f\circ g(x) = f(g(x))$:

$$\frac{\Delta(f\circ g)}{\Delta x} = \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

7. Odvod inverzne fukcije $f^{-1}(x)$ izračunamo z uporabo prejšnjega pravila:

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

8. Odvod funkcije oblike $y(x) = f(x)^{g(x)}$:

   - Funkcijo zapišemo v obliki $y(x) = e^{\ln(f(x))\cdot g(x)}$.
   - Odvajamo po pravilu za odvod posredne funkcije

$$y' = f^g(\ln f\cdot g)'.$$

1.3 Odvodi elementarnih funkcij

Z uporabo definicije in pravil za odvajanje izračunamo odvode osnovnih elementarnih funkcij.

1. $(C)' = 0, \quad C \in \mathbb{R}$
2. $(x)' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{R}$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$
8. $(\sin x)' = \cos x$
9. $(\cos x)' = -\sin x$
10. $(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}$

1.4 Diferencial funkcije

Definicija:

- Diferencial neodvisne spremenljivke x (oznaka dx) je „majhna“ sprememba neodvisne spremenljivke, torej $dx = h$.
- Diferencial odvisne spremenljivke, funkcije f (oznaka df), je enak produktu odvoda funkcije f in diferenciala neodvisne spremenljivke, torej $df = f'(x)dx$.

Opomba: Od tod drug zapis za odvod funkcije: $f'(x) = \frac{df}{dx}$.

Formula za približno računanje: Če je h „dovolj majhen“, potem je

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \approx f'(x_0)$$

ali

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0).$$

Geometrijski pomen diferenciala: (slika 1.1)

- $df = hf'(x_0) = h \tan \alpha$, kjer je α naklonski kot tangente na graf funkcije f v točki x_0.
- $f(x_0) + df = f(x_0) + hf'(x_0)$ je linearni približek (to je vrednost na tangenti) za funkcijsko vrednost $f(x_0 + h)$.

Linearni približki funkcij: (v formuli za približno računanje postavimo $x_0 = 0$, $h = x$)

1. $(1 + x)^p \approx 1 + px, \quad p \in \mathbb{R}$
2. $e^x \approx 1 + x$
3. $\ln(1 + x) \approx x$
4. $\sin x \approx x$
5. $\cos x \approx 1$
6. $\tan x \approx x$

1.5 Lastnosti funkcij, odvedljivih na zaprtem intervalu

1. ***Rolle-ov izrek:***
   Naj bo funkcija f odvedljiva na zaprtem intervalu $[a, b]$.
   Na krajiščih intervala naj funkcija f zavzame isto vrednost: $f(a) = f(b)$.

   Potem znotraj intervala obstaja takšna točka $x_0 \in (a, b)$, v kateri je odvod funkcije f enak nič: $f'(x_0) = 0$.

   Izrek ne velja, če funkcija f ni odvedljiva ali če $f(a) \neq f(b)$.

2. ***Lagrange-ov izrek:***
   Naj bo funkcija f odvedljiva na zaprtem intervalu $[a, b]$.

   Potem znotraj intervala obstaja takšna točka $x_0 \in (a, b)$, da velja

   $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

   Pomen izreka:

   - $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ je smerni koeficient sekante skozi točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$.
   - Izrek zagotovi, da obstaja tangenta, ki je vzporedna sekanti skozi točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$.

   Drug zapis Lagrangevega izreka:
   Postavimo $b - a = h$, torej $b = a + h$. Potem je

   $$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(x_0)$$

   ali

   $$f(a + h) = f(a) + hf'(x_0), \quad a < x_0 < b.$$

Zapis primerjamo z diferencialom $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$.

Dobimo napako, ki jo storimo pri računanju funkcijske vrednosti z diferencialom:

$$\underbrace{(f(a) + hf'(x_0))}_{\text{prava vrednost}} - \underbrace{(f(a) + hf'(a))}_{\text{približna vrednost}} = h(f'(x_0) - f'(a)).$$

3. Naj bo funkcija f odvedljiva na zaprtem intervalu $[a, b]$.
   Odvod funkcije f naj bo povsod na intervalu $[a, b]$ enak nič: $f'(x) = 0$ za vsak $x \in [a, b]$.

   Potem je funkcija f na intervalu $[a, b]$ konstantna.

4. Naj bosta funkciji f in g odvedljivi na intervalu $[a, b]$.
   Povsod na intervalu $[a, b]$ naj imata funkciji enaka odvoda: $f'(x) = g'(x)$ za vsak $x \in [a, b]$.

   Potem se funkciji f in g na intervalu $[a, b]$ razlikujeta le za konstanto: $f(x) = g(x) + C$, kjer je C konstanta.

Opomba: Vsi omenjeni izreki veljajo tudi, če predpostavimo odvedljivost funkcije le na odprtem intervalu (a, b), na zaprtem intervalu $[a, b]$ pa le zveznost.

1.6 L'Hospitalovo pravilo

Kako izračunati limito $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, če je $f(a) = g(a) = 0$?

Če sta f in g odvedljivi na okolici točke a, je

- $f(x) = f(a+h) = f(a) + f'(x_1)h$ in $g(x) = g(a+h) = g(a) + g'(x_2)h$, x_1 in x_2 ležita med x in a (Lagrangev izrek),
- $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)+f'(x_1)h}{g(a)+g'(x_2)h} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_2)}$,
- $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Velja splošneje:

Izrek: Naj bodo izpolnjeni pogoji:

- Funkciji f in g sta odvedljivi na neki okolici točke a (razen morda v točki a).
- Funkciji g in g' sta različni od nič (razen morda v točki a).
- Velja $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$.
- Obstaja $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Potem obstaja $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ in velja

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Opomba: Izrek velja tudi, ko je $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$ ali ko gre x proti $\pm\infty$.

Torej: L'Hospitalovo pravilo uporabimo za računanje limit oblike $\frac{0}{0}$ ali $\frac{\infty}{\infty}$.

1.7 Višji odvodi

- Naj bo f odvedljiva funkcija na intervalu (a, b).
- f' je funkcija. Če je odvedljiva, jo lahko odvajamo.
- $(f')' = f''$ je drugi odvod funkcije f.

Oznake:

- $f', \quad f'', \quad f''', \quad f^{(4)}, \quad f^{(5)}, \ldots$ zaporedni odvodi funkcije f
- $f^{(n)}$ n-ti odvod funkcije f
- $f^{(0)} = f$ dogovor

Definicija: Funkcija f je gladka, če je zvezno odvedljiva. To je, če je njen odvod zvezna funkcija.

1.8 Taylorjeva formula

Definicija: n-ti Taylorjev polinom funkcije f v točki a je

$$T_{a,n}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

- S Taylorjevo formulo v okolici dane točke aproksimiramo odvedljive funkcije s polinomi. Velja:

  Funkcija f in Taylorjev polinom $T_{a,n}$ imata v točki a isto vrednost. Enako velja za vrednosti njunih odvodov do vključno n-tega reda:

  $$f(a) = T_{a,n}(a), \quad f'(a) = T'_{a,n}(a), \quad \ldots, f^{(n)}(a) = T^{(n)}_{a,n}(a).$$

- Drug zapis Taylorjeve formule:

  Če $x - a = h$ oziroma $x = a + h$, potem

  $$T_{a,n}(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n.$$

  Opazimo: Aproksimacija funkcije s Taylorjevim polinomom stopnje 1 se ujema z aproksimacijo funkcije z diferencialom.

Izrek: Naj bo f vsaj $(n+1)$-krat odvedljiva funkcija na odprtem intervalu I in naj $a \in I$. Potem je

$$f(x) = T_{a,n}(x) + R_n(x,a),$$

kjer je $R_n(x,a)$ostanek in velja

$$R_n(x,a) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad c \quad \text{leži med} \quad a \quad \text{in} \quad x.$$

V posebnem primeru $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x,0),$$

kjer je

$$R_n(x,0) = \frac{f^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad c \quad \text{leži med} \quad 0 \quad \text{in} \quad x.$$

- Če znamo oceniti napako R_n (v okolici točke a), potem vemo, kako natančno smo funkcijo aproksimirali s polinomom.
- Če je f polinom stopnje n, je $R_n = 0$.

Taylorjeva vrsta funkcije f ***v točki*** a***:***

$$T_a(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Če je $\lim_{n\to\infty} R_n(x,a) = 0$, je Taylorjeva vrsta konvergentna in njena vsota je enaka $f(x)$.

Razvoj funkcij v Taylorjevo vrsto: ($a = 0$ v gornji formuli)

1. $(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{p(p-1)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n + \cdots$ $p > 0$
2. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$
3. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots$
4. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$
5. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$
6. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$

1.9 Analiza funkcij

1.9.1 Monotonost funkcij

Kriterij monotonosti za odvedljive funkcije:
Za funkcijo f, odvedljivo na intervalu (a,b), velja:

1. $f'(x) \geq 0$ za vsak $x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ na intervalu (a,b) naraščajoča
2. $f'(x) > 0$ za vsak $x \in (a,b) \Rightarrow f$ na intervalu (a,b) strogo naraščajoča
3. $f'(x) \leq 0$ za vsak $x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ na intervalu (a,b) padajoča
4. $f'(x) < 0$ za vsak $x \in (a,b) \Rightarrow f$ na intervalu (a,b) strogo padajoča

Opomba: Obrat puščice v drugem in četrtem primeru ne velja. Funkcija $f(x) = x^3$ je povsod na $\mathbb{R}$ naraščajoča, njen odvod pa ni povsod strogo pozitiven ($f'(0) = 0$).

Definicija: Stacionarne točke funkcije f so rešitve enačbe

$$f'(x) = 0.$$

1.9.2 Lokalni ekstremi funkcij

Definicija:

1. Funkcija f ima v točki c lokalni maksimum, če obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak x iz intervala $(c-\delta, c+\delta)$ velja $f(x) \leq f(c)$.
2. Funkcija f ima v točki c lokalni minimum, če obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak x iz intervala $(c-\delta, c+\delta)$ velja $f(x) \geq f(c)$.
3. Funkcija f ima v točki c globalni maksimum (minimum), če za vsak x iz definicijskega območja funkcije f velja $f(x) \leq f(c)$ $(f(x) \geq f(c))$.

Izrek: Če ima odvedljiva funkcija f v točki c lokalni ekstrem (maksimum ali minimum), potem je njen odvod v točki c enak nič: $f'(c) = 0$.

Opomba: Lokalni ekstrem je torej stacionarna točka. Ni pa vsaka stacionarna točka lokalni ekstrem. Protiprimer predstavlja funkcija $f(x) = x^3$: $f'(0) = 0$, vendar funkcija v točki 0 nima lokalnega ekstrema.

Kako ugotovimo, ali je v dani stacionarni točki c lokalni ekstrem funkcije f?

1. način: Pogledamo, ali prvi odvod spremeni predznak pri prehodu skozi stacionarno točko.

    - Če je prvi odvod funkcije levo od stacionarne točke pozitiven, desno negativen, ima funkcija tam lokalni maksimum.
    - Če je prvi odvod funkcije levo od stacionarne točke negativen, desno pozitiven, ima funkcija tam lokalni minimum.
    - Če prvi odvod v stacionarni točki predznaka ne spremeni, ima funkcija tam prevoj.

2. način: Pogledamo predznak drugega odvoda v stacionarni točki c.

    - Če je $f''(c) < 0$, ima f v točki c lokalni maksimum.
    - Če je $f''(c) > 0$, ima f v točki c lokalni minimum.
    - Če je $f''(c) = 0$, drugi odvod ne da odgovora o naravi stacionarne točke c. Za klasifikacijo potrebujemo višje odvode.

Definicija:

- Funkcija f je konveksna, kjer je drugi odvod funkcije f pozitiven.
- Funkcija f je konkavna, kjer je drugi odvod funkcije f negativen.
- Prevoj je točka, kjer funkcija preide iz konveksnosti v konkavnost ali obratno.

1.9.3 Risanje grafov funkcij

Pri risanju grafa funkcije f predhodno poiščemo:

1. definicijsko območje D_f, obnašanje funkcije na robu D_f
2. ničle, pole oz. navpične asimptote, intervale pozitivnosti in negativnosti
3. stacionarne točke, intervale naraščanja in padanja
4. prevoje, intervale konveksnosti in konkavnosti

1.9.4 Globalni ekstremi funkcije na zaprtem intervalu

Največja (najmanjša) vrednost odvedljive funkcije na zaprtem intervalu $[a, b]$ nastopi bodisi v stacionarni točki znotraj intervala bodisi v krajiščih intervala.

Kako poiščemo največjo in najmanjšo vrednost funkcije f na $[a, b]$?

- izračunamo $f(a), f(b)$
- poiščemo stacionarne točke funkcije f: $x_1, x_2, \ldots$
- izračunamo vrednosti funkcije f v stacionarnih točkah: $f(x_1), f(x_2), \ldots$
- med izračunanimi vrednostmi $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \ldots$ poiščemo največjo - $f_{\max}$ in najmanjšo - $f_{\min}$

Poglavje 2

Integral

2.1 Nedoločeni integral

Definicija: Nedoločeni integral (ali primitivna funkcija) dane funkcije f je takšna funkcija F, da velja $F' = f$ (to je, $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$).

Torej: integriranje je nasprotna operacija odvajanja.

Opomba: Pogoj $F' = f$ zapišemo z diferencialom kot $dF = f(x)dx$.

Oznaka: $F(x) = \int f(x)dx$
(f integrand, x integracijska spremenljivka, $\int$ integralski znak)

Če sta F_1 in F_2 nedoločena integrala dane funkcije f, potem je $F_1(x) - F_2(x) = C$ (konstanta).

Iz tabele odvodov dobimo tabelo nedoločenih integralov.

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \neq -1$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$
8. $\int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \tan x + C$
9. $\int \frac{1}{(\sin x)^2} dx = -\cot x + C$
10. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$
11. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

Še nekaj osnovnih nedoločenih integralov:

1. $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$
2. $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a}) + C$
3. $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$
4. $\int \frac{1}{(x-a)(x-b)} dx = \frac{1}{a-b} \ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right| + C$
5. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$
6. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin(\frac{x}{|a|}) + C$

2.2 Določeni integral

- f naj bo zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$.
- Interval $[a, b]$ razdelimo na manjše intervale: $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$.
- Širine teh intervalov naj bodo po vrsti: $d_1, d_2, \ldots, d_n$.
- Na vsakem od teh intervalov izberemo poljubno točko. Po vrsti naj bodo to točke: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
- Tvorimo vsoto (imenujemo jo integralska ali Riemannova vsota funkcije f):

$$f(\alpha_1)d_1 + f(\alpha_2)d_2 + \cdots + f(\alpha_n)d_n = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)d_i$$

Definicija: Določeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ (oznaka $\int_a^b f(x)dx$) je enak limiti vsote $\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)d_i$, ko gredo vse širine intervalov d_i proti 0.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)d_i, \quad d = \max\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$$

Posledica:

- Če je f zvezna in pozitivna na $[a, b]$, potem je $\int_a^b f(x)dx$ enak ploščini lika pod krivuljo.
- Če je f zvezna in negativna na $[a, b]$, potem je ploščina med krivuljo in abscisno osjo enaka $-\int_a^b f(x)dx$.
- Če je f soda funkcija, potem je $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.
- Če je f liha funkcija, potem je $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Lastnosti določenega integrala:

1. $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du$$

   Ni pomembno, kako označimo integracijsko spremenljivko.

2. $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in (a,b)$$

3. $$\int_a^a f(x)dx = 0$$

4. $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

   če $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ in $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$.

5. Zaradi gornjega
   $$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$
   Ker zvezna funkcija na zaprtem intervalu zavzame vse vrednosti med m in M, obstaja $x_0 \in [a,b]$, da velja
   $$f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$
   To vrednost imenujemo srednja vrednost funkcije f na $[a,b]$ in označimo z $\bar{f}$.

6. Definicija:
   $$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

2.3 Zveza med določenim in nedoločenim integralom

Naj bo f zvezna funkcija na $[a, b]$ in $x \in [a, b]$.

Definicija:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Če se spreminja x, se spreminja ploščina. Rečemo, da je $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ funkcija zgornje meje.

Izrek: Naj bo f zvezna na $[a, b]$, $\quad x \in [a, b]$ in $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Potem velja:

1. F je odvedljiva funkcija.
2. F je nedoločeni integral funkcije f $(F'(x) = f(x))$.
3. $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ Newton-Leibnizova formula

Torej: če poznamo nedoločeni integral F funkcije f, potem izračunamo določeni integral $\int_a^b f(x)dx$ tako, da od vrednosti nedoločenega integrala na zgornji meji $F(b)$ odštejemo vrednost $F(a)$.

Oznaka:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

2.4 Pravila in splošne metode integriranja

Vsa pravila in formule veljajo tako za nedoločene kot za določene integrale.

1. Integral vsote (razlike) funkcij je vsota (razlika) integralov.

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

2. Konstanto lahko damo pred integral.

$$\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx$$

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx$$

3. ***Uvedba nove spremenljivke:***
   Naj bo f zvezna na $[a, b]$, $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ pa zvezno odvedljiva funkcija. Potem velja:

$$\int f(u)du = \int f(g(x))g'(x)dx,$$

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du = \int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx.$$

   Uvedli smo novo spremenljivko $u = g(x), du = g'(x)dx$.
   Pri uvedbi nove spremenljivke se (v primeru določenega integrala) spremenijo meje. Določimo jih iz enačbe, s katero uvedemo novo spremenljivko.

4. ***Metoda delnega integriranja*** (integracija po delih, per partes):

   - Odvajajmo produkt funkcij $u(x)v(x)$:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

- Torej je $u(x)v(x)$ nedoločeni integral od $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$:
$$\int (u'(x)v(x)+u(x)v'(x))dx = \int u'(x)v(x)dx+\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)+C$$
ali
$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$
- Po Newton-Leibnizovi formuli je
$$\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b$$
ali
$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$
- Krajši zapis:
za nedoločeni integral
$$\int udv = uv - \int vdu$$
za določeni integral
$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$$

Pri integraciji po delih:

- dv izberemo tako, da znamo izračunati v.
- Integral $\int vdu$ naj bi bil enostavnejši od začetnega.

Standardni primer za integracijo po delih
$$\int p(x)f(x)dx,$$
pri čemer je

- p polinom.
- f elementarna funkcija.
  - Če je f eksponentna ali kotna funkcija, izberemo
$$u = p, dv = fdx.$$
  - Če je f logaritemska ali krožna (inverzna kotna) funkcija, izberemo
$$u = f, dv = pdx.$$

2.5 Metode integriranja za določene razrede funkcij

2.5.1 Integriranje racionalnih funkcij

1. Integrali enostavnih ulomkov

   (a) $\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C$

   (b) $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C$

   (c) $\int \frac{1}{x^2+px+q} dx = \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \arctan \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C, \quad (p^2-4q<0)$

   (d) $\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n} dx = \frac{2x+p}{(n-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{4n-6}{(n-1)(4q-p^2)} \int \frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} dx,$
   $(p^2-4q<0)$
   Gornje pravilo za nižanje eksponenta nerazcepnega kvadratnega polinoma v imenovalcu dobimo z delnim integriranjem.

2. Integriranje splošnih racionalnih funkcij

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx, \quad p, q \quad \text{polinoma}$$

   - Če je stopnja polinoma p večja od stopnje polinoma q ($\mathrm{st}p \geq \mathrm{st}q$), potem polinoma delimo.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

     Integral polinoma $\int k(x)dx$ znamo izračunati, ostane še $\int \frac{r(x)}{q(x)} dx$, kjer je $\mathrm{st}r < \mathrm{st}q$.

   - Polinom q razcepimo v realnem.

$$q(x) = (x-a)^n \dots (x^2+px+q)^m \dots$$

- Funkcijo $\frac{r(x)}{q(x)}$ razcepimo na parcialne ulomke.

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(x-a)^n} + \cdots +$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q} + \cdots + \frac{C_mx+D_m}{(x^2+px+q)^m}$$

  Konstante izračunamo s primerjavo koeficientov pri potencah x-a.

- Števce v ulomkih oblike $\frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^k}$ zapišemo kot vsoto večkratnika odvoda nerazcepnega kvadratnega polinoma v imenovalcu in konstante.

$$Cx + D = \frac{C}{2}(2x+p) + (D - \frac{Cp}{2})$$

- $\int \frac{r(x)}{q(x)}dx$ se prevede na vsoto integralov enostavnih ulomkov.

2.5.2 Integriranje iracionalnih funkcij

1.
$$\int R(\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[4]{x}, \ldots)dx, \quad R \quad \text{racionalna funkcija}$$

   Uvedemo novo spremenljivko $x = t^n$, n je najmanjši skupni večkratnik korenskih eksponentov.

2.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

   Integral te oblike prevedemo na

   - $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln|x + \sqrt{x^2+\alpha}| + C$, če $a > 0$,
   - $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, če $a < 0$.

2.5.3 Integriranje kotnih funkcij

1.
$$\int (\sin x)^m (\cos x)^n dx, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

- Naj bo vsaj eno od števil m ali n liho. Če je m liho število, uvedemo novo spremenljivko $t = \cos x$. Če je n liho število, uvedemo novo spremenljivko $t = \sin x$.
- Če sta obe števili m in n sodi, znižamo eksponente po formulah

$$(\sin x)^2 = \frac{1 - \cos(2x)}{2},$$
$$(\cos x)^2 = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

2.
$$\int \sin(ax)\sin(bx)dx, \quad \int \sin(ax)\cos(bx)dx, \quad \int \cos(ax)\cos(bx)dx$$

Integrande zapišemo kot

$$\sin(ax)\sin(bx) = \frac{1}{2}(\cos(ax - bx) - \cos(ax + bx)),$$
$$\sin(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}(\sin(ax - bx) + \sin(ax + bx)),$$
$$\cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2}(\cos(ax - bx) + \cos(ax + bx)).$$

3.
$$\int R(\sin x, \cos x)dx, \quad R \quad \text{racionalna funkcija}$$

Uvedemo novo spremenljivko $t = \tan(\frac{x}{2})$.

2.6 Posplošeni integral

V definiciji določenega integrala smo zahtevali končen interval in omejeno funkcijo na tem intervalu.

1. Interval je končen, funkcija ni omejena

   Definicija: Če ima funkcija f v točki $c \in (a, b)$ pol, potem

   $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c_1 \to c^-} \int_a^{c_1} f(x)dx + \lim_{c_2 \to c^+} \int_{c_2}^b f(x)dx.$$

   Integral obstaja (ali je konvergenten), če obstajata obe limiti na desni in sta končni. Sicer: integral je divergenten.

2. Integracijski interval je neskončen

   Definicija:

   $$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$

   $$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

   $$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \to \infty} \int_c^b f(x)dx, \quad c \in \mathbb{R}$$

   Posplošeni integrali obstajajo, če obstajajo ustrezne limite na desni.

2.7 Uporaba integrala

1. Računanje ploščin

   Spomnimo se definicije (f je zvezna funkcija na intervalu $[a,b]$)

   $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)d_i, \quad d = \max\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}.$$

   - f nenegativna na $[a,b]$:
     $\int_a^b f(x)dx$ je enak ploščini lika med grafom funkcije f in abscisno osjo na intervalu $[a,b]$.
   - f nepozitivna na $[a,b]$:
     Ploščina lika med grafom funkcije f in abscisno osjo na intervalu $[a,b]$ je enaka negativni vrednosti integrala $\int_a^b f(x)dx$.
   - Ploščina lika med grafoma funkcij f in g ($f \geq g$) na intervalu $[a,b]$ je enaka $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$.

   Pri računanju ploščin si narišemo skico in izkoristimo simetrijo.

2. Računanje ločne dolžine

   Funkcija f naj bo zvezno odvedljiva na intervalu $[a,b]$.

   - $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$ je dolžina krivulje (grafa funkcije f) nad intervalom $[a,b]$.
   - $ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$ je diferencial loka krivulje $y = f(x)$.

3. Računanje prostornine in površine vrtenine

   Vrtenina je telo, ki nastane, če se ravninski lik zavrti za polni kot okoli določene osi. Poseben primer dobimo, če okrog osi x zavrtimo lik, ki ga omejujejo graf funkcije f, os x in navpičnici v mejah intervala, nad katerim je funkcija podana.

- $V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$ je prostornina vrtenine pri vrtenju grafa funkcije f nad intervalom $[a, b]$ okoli osi x.
- $P = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ je površina plašča vrtenine pri vrtenju grafa funkcije f nad intervalom $[a, b]$ okoli osi x.

2.8 Diferencialne enačbe

Navadna diferencialna enačba n***-tega reda*** je enačba oblike

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Rešitev navadne diferencialne enačbe n-tega reda je na nekem intervalu I definirana funkcija f, ki

- je na tem intervalu n-krat odvedljiva,
- za vsak $x \in I$ ustreza enačbi $F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0$.

Splošna rešitev navadne diferencialne enačbe n-tega reda vsebuje n poljubnih konstant $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Posebno rešitev diferencialne enačbe dobimo iz splošne rešitve, če konstantam izberemo vrednosti - tako, da rešitev izpolnjuje še n dodatnih pogojev.

Posebni primeri:

1. $y' = f(x)$
   Rešitev: $y = \int f(x)dx + C$
2. $y'' = f(x)$
   Rešitev: $y = \int(\int f(x)dx)dx + C_1x + C_2$
3. Enačba z ločljivima spremenljivkama $y' = f(x)g(y)$
   Reševanje: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$
4. Linearna diferencialna enačba prvega reda $y' + p(x)y = q(x)$
   Reševanje:
   - $P(x) = \int p(x)dx, \quad Q(x) = \int q(x)e^{P(x)}dx$
   - $y = e^{-P(x)}(Q(x) + C)$

Poglavje 3

Verjetnostni račun

3.1 Kombinatorika

Funkcija fakulteta:

- $n \mapsto n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n, \quad n \in \mathbb{N}$
- $0! = 1$ dogovor

Binomski koeficient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n, k \in \mathbb{N}, \quad n \geq k \geq 0$
Velja:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Osnovni izrek kombinatorike:
Na koliko načinov lahko naredimo neko dejanje (sestavljeno iz k medsebojno neodvisnih faz), če lahko naredimo prvo fazo na n_1 načinov, drugo na n_2 načinov,... in zadnjo (k-to) na n_k načinov?

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Permutacije:

- Na koliko načinov lahko razvrstimo n elementov?
- Število permutacij n elementov:

$$P_n = n!$$

Permutacije s ponavljanjem:

- Na koliko načinov lahko razvrstimo k različnih elementov, če se prvi ponovi n_1 krat, drugi n_2 krat,... in zadnji (k-ti) n_k krat ($n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$)?
- Število permutacij n elementov s ponavljanjem:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

- Enakovredno vprašanje: Na koliko načinov lahko razvrstimo n elementov, če je med njimi n_1 enakih, n_2 enakih,... in n_k enakih? Pri tem $n \geq n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Variacije:

- Koliko različnih urejenih k-teric lahko naredimo z n različnimi elementi če se ti ne smejo ponoviti ($k \leq n$)?
- Število variacij n elementov k-tega reda:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Velja: $V_n^n = P_n$

Variacije s ponavljanjem:

- Koliko različnih urejenih k-teric lahko naredimo z n različnimi elementi, ki se smejo ponoviti?
- Število variacij n elementov k-tega reda s ponavljanjem:

$$^{(p)}V_n^k = n^k$$

Kombinacije:

- Na koliko različnih načinov lahko izberemo k elementov izmed n elemenov ($k \leq n$)?
- Število kombinacij n elementov k-tega reda:

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- Enakovredno vprašanje: Koliko različnih podmnožic moči k ima množica moči n?

Kombinacije s ponavljanjem:

- Koliko različnih množic moči k lahko naredimo z n različnimi elementi, ki se (v posamezni množici) smejo ponoviti?
- Število kombinacij n elementov k-tega reda s ponavljanjem:

$${}^{(p)}C_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

- Drugače: k-teric je toliko, kot če bi (brez ponavljanja) izbirali med $n+k-1$ elementi.

Vezane kombinacije:

- Na koliko različnih načinov lahko izberemo k_1 elementov izmed n_1 elemenov, k_2 elementov izmed n_2 elemenov,... in k_r elementov izmed n_r elemenov ?

$$C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} \cdots C_{n_r}^{k_r} = \binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}\cdots\binom{n_r}{k_r}$$

- Opomba: Uporabili smo osnovni izrek kombinatorike.

3.2 Dogodki

Poskus je dejanje, opravljeno pod natančno določenimi pogoji.
Drugače: Poskus je realizacija nekega kompleksa pogojev.

Dogodek: pojav, ki se pri poskusu lahko zgodi (ni pa nujno).

- Gotovi dogodek (oznaka G) se zgodi pri vsaki ponovitvi poskusa.
- Nemogoči dogodek (oznaka N) se ne zgodi pri nobeni ponovitvi poskusa.
- Slučajni dogodek (A, B, ...) se pri nekaterih ponovitvah poskusa zgodi, pri nekaterih pa ne.

Računanje z dogodki:

1. način: $A \subset B$
   Dogodek A je način dogodka B, če se v vsakem poskusu, v katerem se zgodi A, zgodi tudi B.
2. enakost: $A = B$
   Dogodek A je enak dogodku B, če se v vsakem poskusu oba dogodka hkrati bodisi zgodita bodisi ne zgodita.
3. unija (vsota): $A \cup B$, $A + B$
   Unija (ali vsota) dogodkov A in B je dogodek, ki se zgodi natanko takrat, ko se zgodi vsaj eden od dogodkov A ali B.
4. presek (produkt): $A \cap B$, AB
   Presek (ali produkt) dogodkov A in B je dogodek, ki se zgodi natanko takrat, ko se zgodita oba dogodka A in B.
5. nasprotni dogodek: $\overline{A}$
   Nasprotni dogodek dogodka A je dogodek, ki se zgodi natanko takrat, ko se dogodek A ne zgodi.

Velja:

- $A \subset G$
- $A + N = A$, $A + G = G$
- $AG = A$, $AN = N$
- $A + \overline{A} = G$, $A\overline{A} = N$

Definicija:

- Dogodka A in B sta nezdružljiva, če se ne moreta zgoditi hkrati ($AB = N$).
- Dogodek A je sestavljen, če ga lahko zapišemo kot vsoto dveh mogočih nezdružljivih dogodkov.
- Dogodek A je elementaren (ali izid), če ni sestavljen.
- Množica slučajnih dogodkov $S = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ je popoln sistem dogodkov, če se pri vsaki ponovitvi poskusa zgodi natanko eden od njih. Torej:
  - vsi A_i so mogoči: $A_i \neq N, \quad i = 1, 2, ..., n$
  - so paroma nezdružljivi: $A_i A_j = N, \quad i \neq j$
  - njihova vsota je gotov dogodek: $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = G$

  Posebej: Če so dogodki $A_1, A_2, ..., A_n$ elementarni, je S popoln sistem izidov.

Opomba:

- Vsak dogodek si lahko predstavljamo kot množico zanj ugodnih izidov (to je kot množico izidov, ki ga sestavljajo). Potem
  - vsoti dogodkov ustreza unija množic izidov
  - produktu dogodkov ustreza presek množic izidov
  - nezdružljivima dogodkoma ustrezata disjunktni množici izidov
  - nemogočemu dogodku ustreza prazna množica

  - gotovemu dogodku ustreza množica vseh izidov (univerzalna množica)
  - nasprotnemu dogodku ustreza komplementarna množica izidov
  - elementarnemu dogodku ustreza množica z enim elementom (ustreznim izidom)
  - če je A način dogodka B, potem je množica izidov (ugodnih za A) podmnožica izidov (ugodnih za B)

- Za računske operacije z dogodki veljajo enaka pravila kot za operacije z množicami.

3.3 Verjetnost

Definicija:

1. Klasična definicija verjetnosti:
   Naj bo $S = \{I_1, I_2, ..., I_n\}$ popoln sistem enako pričakovanih izidov. Dogodek A naj bo vsota k različnih izidov tega sistema. Potem je verjetnost dogodka A (oznaka $(P(A)$) enaka
   $$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{število ugodnih izidov (načinov) za dogodek} A}{\text{število vseh izidov}}$$
   Posebej: Verjetnost posameznega izida je $P(I_i) = \frac{1}{n}$.

2. Statistična definicija verjetnosti:
   Nek poskus ponovimo n krat. Pri tem se dogodek A zgodi k krat (frekvenca dogodka A). Količnik $f(A) = \frac{k}{n}$ je relativna frekvenca dogodka A. Verjetnost dogodka A $(P(A))$ je število, pri katerem se navadno ustali relativna frekvenca $f(A)$, če poskus dovolj krat ponovimo.

Lastnosti verjetnosti:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(N) = 0$, $P(G) = 1$
- če $A \subset B$, je $P(A) \leq P(B)$
- če $A = B$, je $P(A) = P(B)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- če A in B nezdružljiva ($AB = N$ ali $P(AB) = 0$), je $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Definicija: Dogodka A in B sta neodvisna, če je $P(AB) = P(A)P(B)$.

Pogojna verjetnost:
Kolikšna je (v danem poskusu) verjetnost dogodka B, če vemo, da se je dogodek A $(P(A) \neq 0)$ zgodil?

- Spremenimo poskus; opazujmo samo tiste primere, v katerih se dogodek A zgodi. Število vseh izidov spremenjenega poskusa je enako številu izidov, ugodnih za A (n_A od n) v prvotnem poskusu.

- Ugodni izidi za dogodek B (tako v spremenjenem kot v prvotnem poskusu) so natanko tisti, ko se zgodita oba dogodka A in B (n_{AB} ugodnih izidov).

- Verjetnost dogodka B pri pogoju A (oznaka $P(B/A)$) je verjetnost dogodka AB v spremenjenem poskusu:

$$P(B/A) = \frac{n_{AB}}{n_A} = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

  (Verjetnosti na desni sta verjetnosti v prvotnem poskusu.)

Nadaljnje lastnosti verjetnosti:

- $P(AB) = P(A)P(B/A)$

- če A in B neodvisna, je $P(A/B) = P(A)$ in $P(B/A) = P(B)$
  Velja obrat: če $P(A/B) = P(A)$ in $P(B/A) = P(B)$, potem $P(AB) = P(A)P(B)$ (dogodka A in B sta neodvisna)

Dvofazni poskusi:

- Prvo fazo poskusa določa popoln sistem dogodkov (hipotez) $\{H_1, H_2, ..., H_n\}$.

- Formula za popolno verjetnost: Verjetnost, da se v drugi fazi zgodi dogodek A, je

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + \cdots + P(H_n)P(A/H_n).$$

  (Račun: $A = AG = AH_1 + \cdots + AH_n$, $P(A) = P(AH_1) + \cdots + P(AH_n)$)

- Bayesova formula: V drugi fazi se je zgodil dogodek A. Verjetnost, da se je v prvi fazi zgodil dogodek H_i, je

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)}.$$

  (Račun: $P(AH_i) = P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i)$)

Viri

1. Cedilnik, A.: Matematični priročnik. Didakta, Radovljica, 1997
2. Fošner, M.: Uporaba matematičnih metod v logistiki 2. e-gradivo
3. Jamnik, R.: Matematika. DMFA, Lj, 1994
4. Turnšek, A.: Tehniška matematika. UL, FS, Lj, 2006
5. Usenik, J.: Matematične metode v prometu. UL, FPP, Portorož, 1998