Univerza v Mariboru
Fakulteta za logistiko

Uporaba matematičnih metod v logistiki 1

Priročnik

BOJANA ZALAR

Celje 2009

Izdala: Fakulteta za logistiko Univerze v Mariboru

Naslov: Uporaba matematičnih metod v logistiki 1, Priročnik

Avtor: dr. Bojana Zalar

Recenzent: doc. dr. Maja Fošner

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51(035)(0.034.2)

ZALAR, Bojana
Uporaba matematičnih metod v logistiki 1
[Elektronski vir]: priročnik / Bojana Zalar. - El. knjiga. - Celje :
Fakulteta za logistiko, 2009

Način dostopa (URL): http: //fl.uni-mb.si/attachments/140_Prirocnik_umml1.pdf

ISBN 978-961-6562-32-4

247261952

Kazalo

Poglavje 1

Množice in števila

1.1 Matematična logika

Izjava (oznake: $I, A, A_1, \ldots$) je trditev, za katero velja:

- je bodisi pravilna bodisi nepravilna (ni tretje možnosti),
- ni hkrati pravilna in nepravilna.

Logična vrednost izjave je podatek o tem, ali je izjava pravilna ali nepravilna.

- 1 (ali p ali t) za pravilno izjavo
- 0 (ali n ali f) za nepravilno izjavo

Izjavne povezave:

1. Ekvivalenca izjav A in B (oznaka: $A \Leftrightarrow B$, beremo: A natanko takrat, ko B ali A, če in samo če B) je pravilna, če sta obe izjavi A in B hkrati bodisi pravilni bodisi nepravilni. Sicer je nepravilna.
2. Negacija izjave A (oznaka: $\bar{A}$ ali $\neg A$, beremo: ne A) je pravilna natanko takrat, ko je izjava A nepravilna.
3. Konjunkcija izjav A in B (oznaka: $A \wedge B$, beremo: A in B) je pravilna natanko takrat, ko sta pravilni obe izjavi A in B.

4. Disjunkcija izjav A in B (oznaka: $A \vee B$, beremo: A ali B) je pravilna natanko takrat, ko je pravilna vsaj ena od izjav A ali B.
5. Implikacija izjav A in B (oznaka: $A \Rightarrow B$, beremo: če A, potem B ali iz A sledi B) je nepravilna natanko takrat, ko je izjava A pravilna in izjava B nepravilna.

Velja:

- $\bar{\bar{A}} \Leftrightarrow A$
- $A \wedge A \Leftrightarrow A$
  $A \vee A \Leftrightarrow A$
- $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
  $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- $\overline{(A \vee B)} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$
  $\overline{(A \wedge B)} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$

Kvantifikatorji:

1. univerzalni $\forall$, beremo: za vsak
2. eksistenčni $\exists$, beremo: obstaja

1.2 Množice

Množica je zbirka objektov (elementov množice), ki imajo določeno (skupno) lastnost.

Oznake:

- $A, B, \ldots$ oznake za množice (velike črke)
- $x \in A$ beremo: x pripada A ali A vsabuje x ali x je element množice A
  $x \notin A$ beremo: x ne pripada A
- U univerzalna množica - vsebuje vse elemente, ki jih obravnavamo
- $\{\}$ ali $\emptyset$ prazna množica

Podajanje množic:

- z naštevanjem elementov, ki so v množici, na primer $A = \{a, b, 1\}$
- s predpisom, ki mu elementi množice ustrezajo, na primer $A = \{x \in U; x$ ustreza pogoju $P\}$

Podmnožica, enakost množic:

- $A \subseteq B$ $\quad A$ je podmnožica množice B
  Vsak element množice A je tudi element množice B.
  $$\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$$
- $A \subset B$ $\quad A$ je prava podmnožica množice B
  Velja $A \subseteq B$ in obstaja element množice B, ki ni element množice A.
  $$A \subseteq B \quad \text{in} \quad \exists x : x \in B \wedge x \notin A$$
- $A = B$ $\quad$ množici A in B sta enaki
  Množici imata iste elemente oziroma velja hkrati $A \subseteq B$ in $B \subseteq A$.

Potenčna množica množice A (oznaka $P(A)$) je množica, katere elementi so vse podmnožice množice A.

Operacije z množicami:

1. unija: $A \cup B = \{x \in U; x \in A \text{ ali } x \in B\}$
2. presek: $A \cap B = \{x \in U; x \in A \text{ in } x \in B\}$
3. razlika: $A - B = \{x \in U; x \in A \text{ in } x \notin B\}$
4. komplement: $A^C = \{x \in U; x \notin A\}$
5. kartezični produkt: $A \times B = \{(x, y); x \in A,\ y \in B\}$

Lastnosti operacij:

- $A \cup B = B \cup A$
  $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
  $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

Številske množice:

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ množica naravnih števil
   Je zaprta za seštevanje in množenje.
2. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ množica celih števil
   Je zaprta za seštevanje, odštevanje in množenje.
3. $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}\}$ množica racionalnih števil – števil, ki jih lahko zapišemo kot ulomek
   Je zaprta za seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje z neničelnim številom.
4. $\mathbb{R}$ množica realnih števil – števil, ki jih lahko zapišemo kot neskončno decimalno število
   Je zaprta za seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje z neničelnim številom in korenjenje pozitivnih števil.

5. $\mathbb{C} = \{a + ib; a, b \in \mathbb{R}\}$ množica kompleksnih števil – števil, ki jih lahko zapišemo kot urejeni par realnih števil
   Je zaprta za seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje z neničelnim številom in korenjenje.

Velja: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

1.3 Naravna števila

Naravna števila lahko uredimo „po vrsti“, z njimi štejemo.

- Obstaja prvo naravno število – število 1.
- Vsako naravno število n ima naslednika $n+1$.

Princip matematične indukcije: Radi bi dokazali, da neka lastnost (lastnost P) velja za vsa naravna števila.

1. Preverimo, da lastnost velja za število 1 (velja $P(1)$).
2. Predpostavimo, da lastnost velja za neko naravno število n (velja $P(n)$).
3. Dokažemo, da iz veljavnosti za naravno število n sledi veljavnost za $n+1$ (velja $P(n) \Rightarrow$ velja $P(n+1)$).

Potem ta lastnost velja za vsa naravna števila.

Zapis vsote:

- $\sum_{i=1}^{i=n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{i=1}^{i=n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

1.4 Realna števila

1.4.1 Lastnosti realnih števil

Upodobitev realnih števil:

- Narišemo premico.
- Na premici izberemo dve različni točki: točko 0 in točko 1. (Navadno izberemo točko 1 desno od točke 0.)
- Potem velja: vsakemu realnemu številu pripada natanko določena točka na premici in obratno.
- Števila, ki ležijo na isti strani števila 0 kot število 1, so pozitivna števila (oznaka $\mathbb{R}^+$).
- Števila, ki ležijo na drugi strani števila 0 kot število 1, so negativna števila (oznaka $\mathbb{R}^-$).

Opomba: Število 0 ni ne pozitivno ne negativno.

Urejenost realnih števil:

- Relacija neenakosti ali ureditve $a \leq b$:

$$a \leq b \Leftrightarrow b - a \quad \text{nenegativno število}$$

- $a < b \Leftrightarrow b - a$ pozitivno število
- $a \geq b \Leftrightarrow a - b$ nenegativno število
- $a > b \Leftrightarrow a - b$ pozitivno število

Lastnosti relacije $a \leq b$:

1. $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a \leq b$ ali $b \leq a$
2. $a \leq a$

3. $a \leq b$ in $b \leq a \Rightarrow a = b$

4. $a \leq b$ in $b \leq c \Rightarrow a \leq c$

5. $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c, \quad \forall c \in \mathbb{R}$

6. $a \leq b$ in $c > 0 \Rightarrow ac \leq bc$

7. $a \leq b$ in $c < 0 \Rightarrow ac \geq bc$

Opomba: Lastnosti 5, 6 in 7 uporabljamo pri reševanju neenačb.

Gostost racionalnih števil: Racionalna števila so povsod gosta: med dvema poljubnima različnima racionalnima številoma leži vsaj še eno racionalno število.

Omejenost podmnožic realnih števil:

1. Množica $A \subset \mathbb{R}$ je
   - navzgor omejena, če obstaja število $M \in \mathbb{R}$, da velja $x \leq M$ za vse $x \in A$,
   - navzdol omejena, če obstaja število $m \in \mathbb{R}$, da velja $x \geq m$ za vse $x \in A$.
2. - Vsako število M, za katerega velja $x \leq M$ za vse $x \in A$, je zgornja meja množice A.
   - Vsako število m, za katerega velja $x \geq m$ za vse $x \in A$, je spodnja meja množice A.
3. - Natančna zgornja meja množice A ali supremum množice A (oznaka $\sup\{A\}$) je najmanjša zgornja meja množice A.
     Drugače: $M = \sup\{A\}$ in M' je zgornja meja množice $A \Rightarrow M \leq M'$
   - Natančna spodnja meja množice A ali infimum množice A (oznaka $\inf\{A\}$) je največja spodnja meja množice A.
     Drugače: $m = \inf\{A\}$ in m' je spodnja meja množice $A \Rightarrow m' \leq m$
4. - Če $\sup\{A\} \in A$, potem ga imenujemo maksimum množice A (oznaka $\max\{A\}$).
   - Če $\inf\{A\} \in A$, potem ga imenujemo minimum množice A (oznaka $\min\{A\}$).

Polnost množice realnih števil:

- Vsaka navzgor omejena množica realnih števil ima natančno zgornjo mejo.
- Vsaka navzdol omejena množica realnih števil ima natančno spodnjo mejo.

Intervali:

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ zaprt interval
- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ odprt interval
- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ polodprt interval
- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ polodprt interval
- $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x\}$ odprt navzgor neomejen interval
- $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\}$ zaprt navzgor neomejen interval
- $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$ odprt navzdol neomejen interval
- $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$ zaprt navzdol neomejen interval
- $(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$
- $(a-\epsilon, a+\epsilon), \quad \epsilon > 0 \quad \epsilon$-okolica števila a

Absolutna vrednost realnega števila:

$$|a| = \begin{cases} a; & a \geq 0 \\ -a; & a < 0\,. \end{cases}$$

Število $|a|$ predstavlja oddaljenost števila a od izhodišča 0, število $|a-b|$ predstavlja oddaljenost števila a od števila b, torej razdaljo med številoma a in b.

Lastnosti absolutne vrednosti:

1. $|a| \geq 0, \quad |a| = 0 \Rightarrow a = 0$
2. $|-a| = |a|$

3. $-|a| \leq a \leq |a|$
4. $|ab| = |a||b|$
5. $|a+b| \leq |a| + |b|$

1.4.2 Potenca, koren, logaritem

Potenca: $n, m \in \mathbb{N}, \quad q \in \mathbb{Q}, \quad r \in \mathbb{R}$

- potenca z naravnim eksponentom

  $a \in \mathbb{R}$:
  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n}$

  imenovanje: a osnova, n eksponent, a^n potenca

- potenca s celim eksponentom

  $a \in \mathbb{R} - \{0\}$:
  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
  $a^0 = 1$

- koren

  $a > 0$:
  $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = b, \quad b^n = a$

  imenovanje: a radikand, n korenski eksponent, $\sqrt[n]{a}$ n-ti koren

- potenca z racionalnim eksponentom

  $a > 0$:
  $a^q = a^{\frac{n}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^n = (a^n)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a^n}, \quad$ če $q = \frac{n}{m}$

- potenca z realnim eksponentom

  $a > 0$:
  $a^r \approx a^q, \quad$ če $r \approx q$

Pravila za računanje s potencami: $a, b > 0, \quad r, s \in \mathbb{R}$

1. $a^r a^s = a^{r+s}$
2. $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$
3. $(a^r)^s = a^{rs}$
4. $a^r b^r = (ab)^r$
5. $\frac{a^r}{b^r} = (\frac{a}{b})^r$

Logaritem:

- Naj velja $a^x = b, \quad a > 0, a \neq 1, \quad x \in \mathbb{R}$.
- Potem
  1. b je potenca a
  2. a je koren b
  3. x je logaritem b pri osnovi a: $x = \log_a b$
     - $a = 10$, Briggsov logaritem, oznaka $\log b$
     - $a = e$, Napierjev (naravni) logaritem, oznaka $\ln b$

Pravila za računanje z logaritmi:

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r \log_a x$
4. $\log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \log_a x$
5. $\log_b(x) = \frac{1}{\log_a b} \log_a x$

Opomba: Pogoj za veljavnost posameznega pravila je obstoj vseh v njem nastopajočih logaritmov.

1.5 Kompleksna števila

Definicija: Imaginarna enota i je kvadratni koren iz števila -1: $i = \sqrt{-1}$.

Velja:

- $i, -i$ sta rešitvi enačbe $x^2 + 1 = 0$
- $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots$

Definicija: Kompleksno število je število oblike $z = a + ib$, kjer sta a in b realni števili.

- a – realni del kompleksnega števila z, oznaka $\mathrm{Re}(z) = a$
- b – imaginarni del kompleksnega števila z, oznaka $\mathrm{Im}(z) = b$

Torej: $\mathbb{C} = \{a + ib; \quad a, b \in \mathbb{R}\}$

Oznake: $z, u, v, w, \dots$

Geometrijska upodobitev kompleksnih števil:
Kompleksno število $z = a + ib$ upodobimo v ravnini (kompleksna ravnina) kot točko s koordinatama a (realna os) in b (imaginarna os).

Računanje s kompleksnimi števili:
Naj bosta dani kompleksni števili $z = a + ib$ in $w = c + id$.

1. seštevanje, odštevanje: $z \pm w = (a \pm c) + i(b \pm d)$
2. množenje: $z \cdot w = (ac - bd) + i(bc + ad)$
   Kompleksna števila množimo kot dvočlenike.
3. deljenje: $\frac{z}{w} = \frac{a+ib}{c+id}\frac{c-id}{c-id} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$

Definicija: Konjugirana vrednost kompleksnega števila $z = a + ib$ je kompleksno število $\bar{z} = a - ib$.

Lastnosti konjugiranja:

1. $\bar{\bar{z}} = z$
2. $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$
3. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
4. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

Definicija: Absolutna vrednost kompleksnega števila $z = a + ib$ je

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Število $|z|$ je razdalja med številom z in izhodiščem – številom 0.
Število $|z - w|$ je razdalja med številoma z in w.

Lastnosti absolutne vrednosti:

1. $|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Rightarrow z = 0$
2. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
3. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$
4. $\mathrm{Re}(z) \leq z$, $\mathrm{Im}(z) \leq z$
5. $|z + w| \leq |z| + |w|$

Polarni zapis kompleksnega števila: Kompleksno število $z = a + ib$ (podano s koordinatama a in b) predstavimo v kompleksni ravnini s podatkoma:

- r – oddaljenostjo števila z od izhodišča ($r = |z|$),
- φ – kotom med pozitivnim delom realne osi in poltrakom iz izhodišča, na katerem leži število z (oznaka $\varphi = \arg(z)$).

Povezava med zapisoma:

1. Kompleksno število z naj bo podano z absolutno vrednostjo r in kotom φ. Potem:
   - $\mathrm{Re}(z) = a = r\cos\varphi$

- $\mathrm{Im}(z) = b = r \sin\varphi$
- $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

2. Kompleksno število z naj bo podano s koordinatama $z = a + ib$. Potem:

   - $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
   - $\varphi = \begin{cases} \mathrm{arctg}\frac{b}{a}; & \text{za } a > 0 \text{ in } b \geq 0 \text{ (prvi kvadrant)} \\ \frac{\pi}{2}; & \text{za } a = 0 \text{ in } b > 0 \\ \mathrm{arctg}\frac{b}{a} + \pi; & \text{za } a < 0 \text{ (drugi in tretji kvadrant)} \\ \frac{3\pi}{2}; & \text{za } a = 0 \text{ in } b < 0 \\ \mathrm{arctg}\frac{b}{a} + 2\pi; & \text{za } a > 0 \text{ in } b < 0 \text{ (četrti kvadrant)} \end{cases}$

Množenje v polarnem zapisu:
Naj bosta dani kompleksni števili $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ in $w = |w|(\cos\beta + i\sin\beta)$.

- $z \cdot w = |z||w|(\cos(\alpha+\beta) + i(\sin(\alpha+\beta))$
- $z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$
- $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\alpha-\beta) + i(\sin(\alpha-\beta))$

Množenje števila z s številom $(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ predstavlja rotacijo števila z za kot φ okoli izhodišča.

Reševanje enačbe $z^n = w$:

- Število w zapišemo v polarni obliki: $w = |w|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
- n rešitev enačbe ima obliko

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Poglavje 2

Matrike in sistemi linearnih enačb

2.1 Matrike

Definicija:

- Matrika velikosti $m \times n$ (ali $m \times n$ matrika) je tabela števil (členov matrike) z m vrsticami in n stolpci

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

  Krajše (če členov ne izpisujemo): $A = [a_{ij}]$ ali $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

- Vrstica je matrika velikosti $1 \times n$

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n].$$

- Stolpec je matrika velikosti $m \times 1$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

- Ničelna matrika (oznaka 0) je matrika, katere členi so vsi enaki 0

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = [0]_{m\times n}.$$

- Kvadratna matrika je matrika z enakim številom vrstic in stolpcev $m = n$.
- Diagonalna matrika je kvadratna matrika z ničelnimi členi izven glavne diagonale

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}.$$

- Enotska matrika (oznaka I ali I_n) je diagonalna matrika z enicami na glavni diagonali

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

- Gornjetrikotna matrika je kvadratna matrika z ničlami pod glavno diagonalo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

- Spodnjetrikotna matrika je kvadratna matrika z ničlami nad glavno diagonalo.
- Matriki A in B sta enaki, če sta iste velikosti in imata iste člene.

Računske operacije z matrikami:

1. Transponiranje: Transponirano matriko matrike A (oznaka A^T) dobimo tako, da j-ta vrstica matrike A postane j-ti stolpec matrike A^T. Če je A $m \times n$ matrika, potem je A^T $n \times m$ matrika. V primeru kvadratne matrike je transponiranje zrcaljenje preko glavne diagonale. (Diagonalni členi ostanejo.)

2. Produkt števila in matrike: Naj bo $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ in $\alpha \in \mathbb{R}$. Potem je

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m\times n} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

   (Vsak člen matrike množimo z α.)

3. Vsota in razlika matrik: Naj bo $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ in $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ (A in B morata biti iste velikosti). Potem je

$$A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]_{m\times n}.$$

   (Seštejemo (odštejemo) istoležne člene.)

4. Skalarni produkt vrstice $A = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$ in stolpca $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ je število

$$A \cdot B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots a_n b_n.$$

   (Vrstica A in stolpec B morata imeti isto število členov.)

5. Množenje matrik: Matriki $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ in $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ lahko zmnožimo ($A \cdot B$, v tem vrstnem redu), če ima A toliko stolpcev kot ima B vrstic. Produkt $C = A \cdot B$ (ali AB) je matrika velikosti $m \times p$. (Produkt ima toliko vrstic kot matrika A in toliko stolpcev kot matrika B.) Člen na sečišču i-te vrstice in j-tega stolpca v produktu naj bo c_{ij}. Velja: c_{ij} je skalarni produkt i-te vrstice matrike A in j-tega stolpca matrike B.

Definicija:

- Kvadratna matrika A je simetrična, če velja $A = A^T$.

- Kvadratna matrika A je poševno simetrična, če velja $A = -A^T$.

Velja: Vsako kvadratno matriko A lahko zapišemo kot vsoto simetrične (A_S) in poševno simetrične (A_P) matrike: $A = A_S + A_P$, kjer sta $A_S = \frac{A+A^T}{2}$ in $A_P = \frac{A-A^T}{2}$.

Opombe:

- V splošnem $AB \neq BA$, tudi če oba produkta obstajata.
- Lahko se zgodi, da $A \neq 0$ in $A^2 = 0$.
- Pri matrikah v splošnem ne velja pravilo krajšanja: če $AB = AC$, ni nujno $B = C$.

Lastnosti računskih operacij:

- $A + B = B + A$
$AB \neq BA$ (v splošnem)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
$(AB)C = A(BC)$
- $A(B + C) = AB + AC$
$(A + B)C = AC + BC$
- $(A^T)^T = A$
$(A + B)^T = A^T + B^T$
$(AB)^T = B^T A^T$
- $AI = IA = A$
Pri kvadratnih matrikah je enotska matrika enota za množenje.

Definicija: Inverzna matrika (obratna matrika) matrike A (oznaka A^{-1}) je takšna matrika, za katero velja $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.
Opomba: inverzno matriko imajo lahko samo kvadratne matrike.

2.2 Determinante

Definicija:

- Determinanta 2×2 matrike $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ (oznaka $\det A$ ali $\det(A)$) je število

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- Determinanta 3×3 matrike $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ je število

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

- Oznake:
  - $A(i,j)$ podmatrika matrike A z odstranjenima i-to vrstico in j-tim stolpcem
  - $D_{ij} = \det A(i,j)$ poddeterminanta
  - S temi oznakami je determinanta 3×3 matrike enaka $\det A = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13}$.

- Determinanta $n \times n$ matrike $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ je število

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}D_{11} - a_{12}D_{12} + a_{13}D_{13} - \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}D_{1n}.$$

To je razvoj determinante po prvi vrstici.

Velja:

- Determinanto lahko razvijemo po katerikoli vrstici (na primer i-ti)

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} D_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} D_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} D_{in}$$

  ali stolpcu (na primer j-tem)

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} D_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} D_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} D_{nj}.$$

  Opomba: Izberemo tisto vrstico oziroma stolpec, kjer je največ ničel.

- Determinanta trikotne matrike je enaka produktu diagonalnih členov.
- $\det A^T = \det A$

Lastnosti determinante:

1. Če v matriki zamenjamo dve vrstici (stolpca), determinanta spremeni predznak.
2. Če sta v matriki dve vrstici (stolpca) enaki, je determinanta enaka 0.
3. Če v matriki eno vrstico (stolpec) množimo s številom α, pridobi determinanta faktor α.
4. $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$
5. Če je ena vrstica matrike (na primer i-ta) zapisana kot vsota, potem velja

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}.$$

   Enako velja za stolpce.
6. Če neki vrstici prištejemo poljuben večkratnik druge vrstice, se determinanta ne spremeni. Enako velja za stolpce.
7. $\det(AB) = \det A \det B$

Izrek: Naj bo A kvadratna $n \times n$ matrika. Obratna matrika A^{-1} obstaja natanko takrat ko je $\det A \neq 0$. Dana je s formulo

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} D_{11} & -D_{12} & D_{13} & \cdots & (-1)^{1+n} D_{1n} \\ -D_{21} & D_{22} & -D_{23} & \cdots & (-1)^{2+n} D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n+1} D_{n1} & (-1)^{n+2} D_{n2} & (-1)^{n+3} D_{n3} & \cdots & D_{nn} \end{bmatrix}^T,$$

kjer so D_{ij} $(n-1) \times (n-1)$ poddeterminante.

Definicija: Kvadratna matrika A je regularna ali obrnljiva, če obstaja A^{-1}. Sicer je singularna.

Velja:

- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Matrične enačbe: Naj bosta dani obrnljiva $n \times n$ matrika A in matrika B. Iz danih enačb izračunamo neznano matriko X:

- $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$
  Da je naloga rešljiva, mora imeti matrika B n vrstic. Velikost matrike X je enaka velikosti matrike B.
- $XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$
  Da je naloga rešljiva, mora imeti matrika B n stolpcev. Velikost matrike X je enaka velikosti matrike B.

2.3 Sistemi linearnih enačb

2.3.1 Gaussova eliminacijska metoda

- Sistem m linearnih enačb z n neznankami $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &= \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

- V matrični obliki: $A\underline{x} = \underline{b}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ matrika koeficientov sistema,

velikosti $m \times n$,

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ stolpec n neznank in

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$ stolpec m desnih strani sistema.

Rešiti sistem: pomeni poiskati vse n-terice števil $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ki ustrezajo danim m enačbam.

1. Če je A kvadratna matrika $m = n$ in $\det A \neq 0$, potem

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b}.$$

   n-terica števil oziroma stolpec $\underline{x}$ je natanko določen.

2. Če gornje ni izpolnjeno (A ni kvadratna ali $\det A = 0$), ima sistem lahko

   - eno (natanko določeno) rešitev (določen sistem),
   - nobene rešitve (protisloven sistem),
   - neskončno rešitev (nedoločen sistem).

Iščemo metodo za reševanje sistemov enačb, ki je

- bolj ekonomična od računanja obratne matrike (v prvem primeru),
- splošnejša – rešitev dobimo tudi v drugem primeru.

Ekvivalentna sistema linearnih enačb imata bodisi iste rešitve bodisi sta oba nerešljiva. V postopku reševanja sistema poiščemo danemu sistemu čim preprostejši ekvivalentni sistem, to je trikotni sistem. Matrika (ne nujno kvadratna) takšnega sistema ima ničle pod glavno diagonalo. Z naslednjimi operacijami dobimo ekvivalentni sistem:

- zamenjava vrstnega reda enačb,
- množenje (deljenje) neke enačbe sistema z neničelnim številom,
- prištevanje ene enačbe drugi.

Gaussova eliminacijska metoda je formalizacija gornjega postopka.

- Oznake:
  - A matrika (koeficientov) sistema
  - $R = [A|\underline{b}]$ razširjena matrika sistema
- Gaussova eliminacija vsebuje (po potrebi):
  - zamenjavo vrstic matrike R,
  - množenje posamezne vrstice matrike R z neničelnim številom,

– prištevanje večkratnika ene vrstice matrike R drugi – tako, da ima dobljena matrika pod glavno diagonalo ničle.

Dobljena „trikotna“ matrika je razširjena matrika iskanega ekvivalentnega sistema.

2.3.2 Rešljivost sistemov

Rang matrike A (oznaka rang A) je maksimalno število neničelnih vrstic, ki jih dobimo z Gaussovo eliminacijsko metodo.
Če je A $m \times n$ matrika, je rang $A \leq \min\{m, n\}$.

Izrek: Naj bo $A\underline{x} = \underline{b}$ sistem m enačb z n neznankami. Nadalje naj bo $R = [A|\underline{b}]$ razširjena matrika tega sistema. Potem velja:

1. sistem $A\underline{x} = \underline{b}$ je rešljiv $\Leftrightarrow$ rang $A =$ rang R
2. sistem $A\underline{x} = \underline{b}$ je enolično rešljiv $\Leftrightarrow$ rang $A =$ rang $R = n$
3. rang $A =$ rang $R = r < n \Leftrightarrow$ sistem $A\underline{x} = \underline{b}$ ima neskončno rešitev
   Pri tem lahko $(n-r)$ neznank lahko poljubno izberemo, $r =$ rang A neznank je z njimi natanko določenih; rešitev sistema je $(n-r)$ parametrična.

Homogeni sistem je sistem z ničelno desno stranjo $A\underline{x} = \underline{0}$. Za homogeni sistem vedno velja rang $A =$ rang R, torej je homogeni sistem vedno rešljiv. Eno rešitev $\underline{x} = \underline{0}$ uganemo, imenujemo jo ničelna ali trivialna rešitev. Velja:

1. rang $A = n$ (= število neznank) $\Leftrightarrow$ rešitev je ena sama (ničelna)
2. rang $A < n \Leftrightarrow$ sistem ima neskončno rešitev, je netrivialno rešljiv
   Opomba: Če ima homogeni sistem netrivialno rešitev, ima neskončno rešitev.

Kvadratni homogeni sistem (sistem $A\underline{x} = \underline{0}$ s kvadratno $n \times n$ matriko) ima

1. natanko eno rešitev (ničelno) $\Leftrightarrow$ rang $A = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$
2. neskončno rešitev $\Leftrightarrow$ rang $A < n \Leftrightarrow \det A = 0$

Poglavje 3

Vektorji

3.1 Definicija

Kartezični koordinatni sistem v prostoru:

- Je pravokoten. Tvorijo ga 3 medsebojno pravokotne premice (koordinatne osi x, y, z), ki se sekajo v (eni) točki – koordinatnem izhodišču.
- Je pozitivno orientiran. Na vsaki od koordinatnih osi izberemo (glede na koordinatno izhodišče) pozitivni in negativni del. Če pozitivni del osi x zavrtimo po krajši poti do pozitivnega dela osi y, kaže pozitivni del osi z v smeri desnega vijaka.

Podajanje točk v prostoru:

- Poljubno točko T prostora podamo s tremi števili – projekcijami točke na koordinatne osi: $T(x, y, z)$.
- Oznaka za prostor: $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}\}$

Definicija: Vektor je usmerjena daljica. Podan je z začetno točko $A(a_1, a_2, a_3)$ in končno točko $B(b_1, b_2, b_3)$; oznaka $\overrightarrow{AB}$ ali krajše $\vec{a}$, $\vec{b}, \ldots$.

- Dolžina vektorja ali absolutna vrednost vektorja (oznaka $|\overrightarrow{AB}|$) je enaka razdalji med točkama A in B.

- Smer vektorja je določena z začetno točko A in končno točko B.
- Dva vektorja sta enaka, če imata isto dolžino in isto smer.

Koordinate vektorja: Iz znanih koordinat začetne in končne točke dobimo koordinate vektorja tako, da odštejemo istoležne koordinate – od koordinat končne točke $B(b_1, b_2, b_3)$ odštejemo koordinate začetne točke $A(a_1, a_2, a_3)$

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

Dva vektorja sta enaka, če imata enake istoležne koordinate.

Dolžina vektorja $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$***:***

- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
- Enotski vektor je vektor dolžine 1.

Krajevni vektor točke T (oznaka $\vec{r_T}$) je vektor od koordinatnega izhodišča $O(0, 0, 0)$ do končne točke $T(x, y, z)$.

- $\vec{r_T} = (x, y, z)$
- Značilnost: koordinate krajevnega vektorja $\vec{r_T}$ so enake koordinatam točke T.

Enotski vektorji na kooordinatnih oseh:

- $\vec{\imath} = (1, 0, 0), \quad \vec{\jmath} = (0, 1, 0), \quad \vec{k} = (0, 0, 1)$
- Komponente vektorja $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ vzdolž koordinatnih osi:

$$a_1\vec{\imath}, \quad a_2\vec{\jmath}, \quad a_3\vec{k}$$

3.2 Računanje z vektorji

3.2.1 Seštevanje vektorjev

Definicija:

- Vektor $\vec{b}$ prenesemo v končno točko vektorja $\vec{a}$. Vektor, ki sega od začetne točke vektorja $\vec{a}$ do končne točke vektorja $\vec{b}$ imenujemo vsota vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$, oznaka $\vec{a}+\vec{b}$.
- Drug način: vsota $\vec{a}+\vec{b}$ je diagonala paralelograma (določenega z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$), ki poteka iz skupne začetne točke.
- Koordinate vsote: $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$
- Vektor nič: $\vec{0}=(0,0,0)$
  Opomba: Vektor $\vec{0}$ nima definirane smeri oziroma ima poljubno smer.
- Vektorju $\vec{a}$ nasprotni vektor: $-\vec{a}=(-a_1,-a_2,-a_3)$
  Nasprotni vektor $-\vec{a}$ ima isto dolžino kot vektor $\vec{a}$ in nasprotno smer. Velja: $\vec{a}+(\vec{-a})=\vec{0}$.
- Odštevanje vektorjev: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$
  Geometrijsko: vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ narišemo iz skupne začetne točke; razlika $\vec{a}-\vec{b}$ leži na tretji stranici trikotnika, puščica kaže proti $\vec{a}$.

3.2.2 Množenje vektorja s skalarjem, linearna kombinacija vektorjev

Definicija: Produkt vektorja $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ s skalarjem (številom) $\alpha\in\mathbb{R}$ je

$$\alpha\vec{a}=(\alpha a_1,\alpha a_2,\alpha a_3).$$

Velja:

- $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$
- Smer:
  - $\alpha > 0 \Rightarrow \vec{a}$ in $\alpha\vec{a}$ imata isto smer
  - $\alpha < 0 \Rightarrow \vec{a}$ in $\alpha\vec{a}$ imata nasprotno smer

Definicija:

- Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta kolinearna, če sta vzporedna:

  $$\vec{b} = \alpha\vec{a}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Vektorji (trije) $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ so koplanarni, če ležijo v isti ravnini:

  $$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- Vektorji $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$ so linearno neodvisni, če velja:

  $$\alpha_1\vec{a_1} + \alpha_2\vec{a_2} + \cdots + \alpha_n\vec{a_n} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

  Sicer so linearno odvisni.

- Izraz

  $$\alpha_1\vec{a_1} + \alpha_2\vec{a_2} + \cdots + \alpha_n\vec{a_n}$$

  je linearna kombinacija vektorjev $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$.

Velja:

1. Če sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ nekolinearna, potem sta linearno neodvisna (to je $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$).
2. Če so vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ nekoplanarni, potem so linearno neodvisni (to je $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$).
3. Dva vektorja na premici sta linearno odvisna.
4. Trije vektorji v ravnini so linearno odvisni.

5. Štirje vektorji v prostoru so linearno odvisni.

6. Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ naj bodo nekoplanarni (linearno neodvisni). Tedaj lahko poljuben vektor $\vec{d}$ zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.

3.2.3 Skalarni produkt vektorjev

Definicija: Skalarni produkt (oznaka: $\vec{a} \cdot \vec{b}$, beremo: a skalarno b) vektorjev $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Istoležne koordinate zmnožimo in seštejemo, rezultat je število.

Lastnosti skalarnega produkta:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

3. $(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha \vec{b}) = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b})$

4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$

5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi$, kjer je φ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$

   Opomba: To lastnost lahko vzamemo za definicijo skalarnega produkta v trirazsežnem prostoru.

6. Formula za izračun kota φ med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$: $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

7. Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta pravokotna natanko takrat, ko je $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

3.2.4 Vektorski produkt vektorjev

Definicija: Vektorski produkt vektorjev $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ je vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ (beremo: a vektorsko b), za katerega velja:

- Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ je pravokoten na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
- Dolžina $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi$, kjer je φ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
  To je ploščina paralelograma s stranicama $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
- Če $\vec{a}$ po krajši poti zavrtimo do $\vec{b}$, potem ima vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ smer desnega vijaka.

Lastnosti vektorskega produkta:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$
3. $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a} \times \vec{b})$
4. Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta kolinearna natanko takrat ko je $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.
   Posebej: $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.
5. $\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{\imath} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{\jmath} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$ ali

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\imath} & \overrightarrow{\jmath} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Uporaba vektorskega produkta:

- za računanje ploščine paralelograma ali trikotnika,
- za konstrukcijo pravokotnice na dana vektorja.

3.2.5 Mešani produkt vektorjev

Definicija: Mešani produkt vektorjev $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ in $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ je število

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

ali

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0 \Rightarrow$ vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ so desno (ali pozitivno) orientirani
- $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0 \Rightarrow$ vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ so levo (ali negativno) orientirani

Lastnosti mešanega produkta:

1. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$
2. $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ je prostornina paralelepipeda, določenega z vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.
3. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow$ vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ so koplanarni

Uporaba mešanega produkta: za računanje prostornine paralelepipeda, prizme ali tetraedra.

3.3 Premica in ravnina v prostoru

Ravnina v prostoru je določena bodisi

1. s točko $A(a_1, a_2, a_3)$ na ravnini in njeno pravokotnico (normalo) $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ bodisi
2. s tremi točkami A, B in C na ravnini. V tem primeru izračunamo pravokotnico $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

Kako preverimo, ali dana točka T s krajevnim vektorjem $\vec{r} = (x, y, z)$ leži na ravnini?

- Če točka T leži v ravnini, leži v ravnini vektor $\overrightarrow{AT} = \vec{r} - \vec{r_A}$.
- Vektor v ravnini $\overrightarrow{AT}$ je pravokoten na normalo $\vec{n}$, velja $\overrightarrow{AT} \cdot \vec{n} = 0$.

Enačba ravnine skozi točko $A(a_1, a_2, a_3)$, pravokotne na $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$:

- $(\vec{r} - \vec{r_A}) \cdot \vec{n} = 0$ je vektorska enačba ravnine.
- Vstavimo koordinate in dobimo splošno obliko enačbe ravnine:
  $n_1x + n_2y + n_3z = d$, kjer je $d = \vec{r_A} \cdot \vec{n} = a_1n_1 + a_2n_2 + a_3n_3$.
- Če je $|\vec{n}| = 1$, govorimo o normirani enačbi ravnine.

Premica v prostoru je določena bodisi

1. s točko $A(a_1, a_2, a_3)$ na premici in njeno smerjo $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$ bodisi
2. z dvema točkama A in B na premici (v tem primeru izračunamo smer $\vec{s} = \vec{r_B} - \vec{r_A}$) bodisi
3. kot presek dveh nevzporednih ravnin.

Enačba premice skozi točko $A(a_1, a_2, a_3)$ in smernim vektorjem $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$:

- Točka T s krajevnim vektorjem $\vec{r} = (x, y, z)$ naj leži na premici. Potem velja $\vec{r} = \vec{r_A} + t\vec{s}$ za nek $t \in \mathbb{R}$. Od tod vektorska oblika enačbe premice:

$$\vec{r} = \vec{r_A} + t\vec{s}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Vstavimo koordinate in dobimo parametrično obliko enačbe premice $(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(s_1, s_2, s_3), \quad t \in \mathbb{R}$ oziroma

$$\begin{aligned} x &= a_1 + ts_1 \\ y &= a_2 + ts_2 \\ z &= a_3 + ts_3, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Če $s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \neq 0$, iz vsake od gornjih enačb izračunamo parameter t, izenačimo in dobimo kanonsko obliko enačbe premice

$$\frac{x - a_1}{s_1} = \frac{y - a_2}{s_2} = \frac{z - a_3}{s_3}.$$

  Če (na primer) $s_1 = 0$, zapišemo

$$x = a_1, \quad \frac{y - a_2}{s_2} = \frac{z - a_3}{s_3}.$$

Presek ravnin: Presek dveh ravnin izračunamo tako, da rešimo sistem enačb, ki ga sestavljata enačbi ravnin v splošni obliki. Rešitev sistema je:

1. prazna (ne obstaja), če sta dani ravnini vzporedni (sistem je protisloven),
2. enoparametrična, predstavlja premico (v parametrični obliki), ki je presek danih ravnin,
3. dvoparametrična, predstavlja isto ravnino kot dani ravnini.

Presek premice in ravnine: x, y in z iz parametrične oblike enačbe premice vstavimo v enačbo dane ravnine v splošni obliki, dobimo enačbo za parameter t. Rešitev:

1. ne obstaja, če sta premica in ravnina vzporedni,
2. je število, na primer t_0, ki ga vstavimo v parametrično obliko enačbe premice in dobimo koordinate presečišča,
3. je vsako realno število. V tem primeru premica leži v ravnini.

Poglavje 4

Zaporedja in vrste

4.1 Preslikave

Definicija: Preslikava (upodobitev, funkcija) iz množice A v množico B je predpis (pravilo, postopek), ki vsakemu elementu množice A priredi natanko določen (en sam) element množice B.

Oznake:

- $f, g, h, a, \ldots$ oznake za preslikavo
- $f : A \longrightarrow B$
  $f : a \longmapsto f(a)$

Imenovanje:

- A definicijsko območje, domena
- B kodomena
- a original
- $f(a)$ slika, funkcijska vrednost

Zaloga vrednosti preslikave f je množica vseh slik

$$Z_f = \{f(a); a \in A\}.$$

Zaloga vrednosti je podmnožica kodomene ($Z_f \subseteq B$).

Graf preslikave f je množica vseh parov $(a, f(a))$:

$$G_f = \{(a, f(a); a \in A\}.$$

Graf preslikave je podmnožica kartezičnega produkta domene in kodomene ($G_f \subseteq A \times Z_f \subseteq A \times B$).

Definicija:

- Preslikava $f : A \longrightarrow B$ je surjektivna (na), če je zaloga vrednosti enaka kodomeni ($Z_f = B$).
  Drugače: $\forall b \in B \quad \exists a \in A : \quad f(a) = B$
- Preslikava $f : A \longrightarrow B$ je injektivna, če imata različna originala različni sliki: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$.
  Drugače: $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$
- Preslikava $F : A \longrightarrow B$ je bijektivna, če je surjektivna in injektivna.

Identična preslikava (oznake id, I, I_A) je preslikava

$$I_A : A \longrightarrow A$$

$$a \longmapsto a.$$

Kompozitum preslikav $f : A \longrightarrow B$ in $g : B \longrightarrow C$ je preslikava

$$g \circ f : A \longrightarrow C$$

$$a \longmapsto g(f(a)).$$

Opomba: Ujemati se morata kodomena preslikave f in domena preslikave g.

Posebni primer: Za preslikavi $f : A \longrightarrow B$ in $g : B \longrightarrow A$ lahko definiramo kompozituma

$$g \circ f : A \longrightarrow A,$$

$$f \circ g : B \longrightarrow B.$$

Inverzna preslikava preslikave $f : A \longrightarrow B$ je takšna preslikava $g : B \longrightarrow A$, da velja

$$g \circ f = I_A \quad \text{in} \quad f \circ g = I_B.$$

Izrek: Preslikava $f : A \longrightarrow B$ naj bo bijektivna. Tedaj obstaja (ena sama) inverzna preslikava preslikave f (oznaka f^{-1}).

4.2 Zaporedja

Definicija: Realno zaporedje je preslikava (funkcija) iz naravnih števil v množico realnih števil.

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$a : n \longmapsto a(n)$$

Oznake:

- $a, b, \ldots$ oznake za preslikavo (funkcijski predpis)
- $a_1 = a(1), a_2 = a(2), \ldots, a_n = a(n), \ldots$ členi zaporedja (slike oz. funkcijske vrednosti zaporedja)
- $\{a_n\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ oznake za zaporedje

Opomba: Zaporedje je lahko tudi končno.

$$a : N \subset \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad N \quad \text{končna}$$

Podajanje zaporedij:

- z naštevanjem členov (če končno): $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$
- z naštevanjem prvih nekaj členov: $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$
- s podajanjem funkcijskega predpisa (s splošnim členom): $a_n = a(n)$
- rekurzivno: s podajanjem pravila, kako izračunati n-ti člen iz predhodnih (znanih)

Graf zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$G_a = \{(n, a_n); n \in \mathbb{N}\}$$

Podzaporedje danega zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \ldots, \quad \{i_1, i_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$$

Omejenost:

- Zaporedje je (navzgor/navzdol) omejeno, če je omejena (navzgor/navzdol) množica funkcijskih vrednosti zaporedja $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \subset \mathbb{R}$.
- Zgornja/spodnja meja zaporedja je zgornja/spodnja meja množice $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \subset \mathbb{R}$.
- Natančna zgornja/spodnja meja zaporedja je natančna zgornja/spodnja meja množice $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ (oznaka $\sup\{a_n\}$ / $\inf\{a_n\}$).
- Če zaporedje nima zgornje/spodnje meje, je navzgor/navzdol neomejeno.

Monotonost:

- Zaporedje je naraščajoče, če $a_{n+1} \geq a_n, \quad \forall n$.
- Zaporedje je strogo naraščajoče, če $a_{n+1} > a_n, \quad \forall n$.
- Zaporedje je padajoče, če $a_{n+1} \leq a_n, \quad \forall n$.
- Zaporedje je strogo padajoče, če $a_{n+1} < a_n, \quad \forall n$.
- Zaporedje je monotono, če je bodisi naraščajoče bodisi padajoče.
- Zaporedje je alternirajoče, če sta poljubna zaporedna člena zaporedja različnega predznaka ($a_{n+1} \cdot a_n < 0, \quad \forall n$). Alternirajoče zaporedje ni monotono.

Kako preverimo, ali je dano zaporedje $\{a_n\}$ monotono?

- Izračunamo razliko zaporednih členov zaporedja $d_n = a_{n+1} - a_n$.
- Če je ta razlika konstantnega znaka (to je neodvisnega od n), je zaporedje monotono. In sicer:
  - naraščajoče, če $d_n \geq 0$,
  - padajoče, če $d_n \leq 0$.

Stekališče zaporedja: Število $S \in \mathbb{R}$ je stekališče zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, če je v vsaki ϵ-okolici števila S neskončno mnogo členov zaporedja. Tedaj je neenačba $|a_n - S| < \epsilon \quad (\epsilon > 0)$ izpolnjena za neskončno mnogo indeksov (originalov pri preslikavi a) n.

Limita zaporedja:

- Število $A \in \mathbb{R}$ je limita zaporedja (oznaka $A = \lim_{n\to\infty} a_n$), če so v vsaki ϵ-okolici števila A vsi členi zaporedja, razen končno mnogo. Tedaj je neenačba $|a_n - S| < \epsilon \quad (\epsilon > 0)$ izpolnjena za vse indekse n od nekega naprej.
- Drugače: Število $A \in \mathbb{R}$ je limita zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, če za vsako pozitivno število ϵ obstaja naravno število $N(\epsilon)$, da velja: $n > N(\epsilon) \Rightarrow |a_n - A| < \epsilon$.
- Zaporedje, ki ima limito je konvergentno.

Velja:

- Limita zaporedja je tudi stekališče zaporedja. Obrat ne velja: ni vsako stekališče tudi limita zaporedja.
- Konvergentno zaporedje je omejeno.
- Zaporedje je konvergentno natanko takrat, ko je omejeno in ima eno samo stekališče.
- Monotono in omejeno zaporedje je konvergantno.

Meje monotonih zaporedij:

- Za omejeno naraščajoče zaporedje velja:
  - $\sup\{a_n\} = \lim_{n\to\infty} a_n$
  - $\inf\{a_n\} = a_1$
- Za omejeno padajoče zaporedje velja:
  - $\sup\{a_n\} = a_1$
  - $\inf\{a_n\} = \lim_{n\to\infty} a_n$

Limite nekaterih zaporedij:

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- racionalno zaporedje $a_n = \frac{c_k n^k + \cdots c_1 n + c_0}{d_l n^l + \cdots d_1 n + d_0}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0; & k < l \\ \frac{c_k}{d_k}; & k = l \\ (\frac{c_k}{d_l}) \cdot \infty; & k > l \end{cases}$$

- eksponentno zaporedje $a_n = a^n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0; & |a| < 1 \\ 1; & a = 1 \\ \infty; & a > 1 \\ \text{ne obstaja}; & a \le -1 \end{cases}$$

- $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e$$

- $a_n = \sqrt[n]{n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

Računanje z zaporedji:

- $\{a_n\} \pm \{b_n\} = \{a_n \pm b_n\}$
- $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$
- $\{a_n\}/\{b_n\} = \{a_n/b_n\}, \quad b_n \neq 0, \forall n$

Naj bo $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ in $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Potem velja

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = AB$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = A/B, \quad b_n \neq 0, B \neq 0$

Aritmetično zaporedje:

- Definicija: $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$, d konstanta
- Vsota prvih n členov aritmetičnega zaporedja: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

Geometrijsko zaporedje:

- Definicija: $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n \cdot q$, q konstanta
- Vsota prvih n členov geometrijskega zaporedja: $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$, če $q \neq 1$

4.3 Vrste

Definicija:

- Vrsta je formalna vsota zaporedja
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$
ali
$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$
- n-ta delna vsota zaporedja je $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.
- Vrsta $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ je konvergentna, kadar obstaja limita delnih vsot zaporedja $\lim_{n\to\infty} S_n$. Tedaj je njena vsota
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Geometrijska vrsta:

- Naj bo $a_1, a_2, \ldots$ geometrijsko zaporedje s količnikom q.
- n-ta delna vsota geometrijskega zaporedja je $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$.
- Geometrijska vrsta $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ je konvergentna, če je $|q| < 1$. Njena vsota je
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = a_1 \frac{1}{1-q}.$$

Velja:

- Če je vrsta $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergentna, potem velja $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Obrat ne velja.
- Naj za vrsti $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ in $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ velja: $0 \leq b_i \leq a_i$, za vsak $i \in \mathbb{N}$.
  - Če je $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergentna, potem je $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ konvergentna.
  - Če je $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ divergentna, potem je $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergentna.

Poglavje 5

Funkcije

5.1 Funkcije ene realne spremenljivke

Definicija:

- Funkcija f je predpis, ki vsakemu številu x iz definicijskega območja (oznaka D ali D_f) priredi natanko določeno število, ki ga imenujemo funkcijska vrednost (oznaka $f(x)$ ali y).
- Zaloga vrednosti funkcije f (oznaka Z ali Z_f, R, R_f) je množica vseh funkcijskih vrednosti.
- Graf funkcije (oznaka G ali G_f) je množica vseh parov $(x, f(x))$, če $x \in D_f$.

Oznake:

$$f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f : x \longmapsto f(x)$$

$$Z_f = \{f(x); x \in D_f\}$$

$$G_f = \{(x, f(x)); x \in D_f\} \subseteq D_f \times Z_f$$

Sode in lihe funkcije: Definicijsko območje naj bo simetrično glede na koordinatno izhodišče (na primer $D = (-a, a)$ ali $D = \mathbb{R}$).

- Funkcija f je soda, če velja $f(-x) = f(x)$.
  Graf sode funkcije je simetričen glede na os y.
- Funkcija f je liha, če velja $f(-x) = -f(x)$.
  Graf lihe funkcije je simetričen glede na koordinatno izhodišče.

Periodičnost: Število T je perioda funkcije f, če velja $f(x+T) = f(x)$. Najmanjši pozitivni periodi rečemo osnovna perioda.

Monotonost funkcij: Naj $x_1, x_2 \in (a, b) \subseteq D_f$. Funkcija f je na intervalu (a, b)

- naraščajoča, če velja: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,
- strogo naraščajoča, če velja: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,
- padajoča, če velja: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$,
- strogo padajoča, če velja: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,
- monotona, če je bodisi naraščajoča bodisi padajoča.

Sestavljena funkcija ali kompozitum: Kompozitum funkcij f in g (oznaka: $g \circ f$, beremo: g kompozitum f) je takšna funkcija h, za katero velja funkcijski predpis $h(x) = g(f(x))$.

Inverzna funkcija:

- Funkcija g je inverzna funkcija funkcije f, če velja $f(g(x)) = x$ in $g(f(x)) = x$.
- Oznaka funkciji f inverzne funkcije: f^{-1}
- Grafa funkcij f in f^{-1} sta simetrična glede na premico $y = x$.
- Da izračunamo inverzno funkcijo funkcije f, rešimo enačbo $f(y) = x$.

Definicija:

- Funkcija f je injektivna, če velja: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)(x_1, x_2 \in D_f)$.
  Drugače zapisan pogoj: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

- Funkcija $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ je surjektivna, če za vsak $y \in \mathbb{R}$ lahko najdemo tak $x \in D_f$, da velja $y = f(x)$.
- Funkcija $f : D \longrightarrow Z$ $(D, Z \subset \mathbb{R})$ je surjektivna, če za vsak $y \in Z$ lahko najdemo tak $x \in D$, da velja $y = f(x)$.
- Funkcija f je bijektivna, če je injektivna in surjektivna.

Velja: Inverzno funkcijo imajo samo bijektivne funkcije.

5.2 Limita

Lahko se zgodi, da funkcija f

- ni definirana v neki točki $x = a$,
- je definirana v neki okolici točke a – to je: je definirana, če $x \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ in $x \neq a$.

Definicija: Funkcija f ima v točki $x = a$ limito A, če za vsak pozitiven ϵ obstaja pozitiven δ, da velja

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon.$$

Oznaka:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

Definicija:

- Desna limita funkcije f v točki $x = a$: $\lim_{x \to a^+} f(x)$
  (x se približuje številu a z desne strani)

  Enakovredni zapisi: $\lim_{x \to a^+} f(x), \quad \lim_{x \downarrow a} f(x), \quad \lim_{x \to a+0} f(x)$

- Leva limita funkcije f v točki $x = a$: $\lim_{x \to a^-} f(x)$
  (x se približuje številu a z leve strani)

  Enakovredni zapisi: $\lim_{x \to a^-} f(x), \quad \lim_{x \uparrow a} f(x), \quad \lim_{x \to a-0} f(x)$

Funkcija ima limito, če sta desna in leva limita enaki.

Pravila za računanje limit: Funkciji f in g naj imata limito. Potem velja:

1. $\lim_{x \to a}(C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x \to a} f(x), \quad C$ konstanta
2. $\lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$
3. $\lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$
4. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$

Pravila veljajo, če (na desni) ne dobimo nedoločenega izraza.

Limita funkcije v neskončnosti:

$$\lim_{x\to\infty} f(x),\ \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Če gre x proti ∞ ali $-\infty$, nastanejo tri možnosti:

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$
2. $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$
   Premica $y = A$ je desna vodoravna asimptota funkcije f.

   $\lim_{x\to-\infty} f(x) = A$
   Premica $y = A$ je leva vodoravna asimptota funkcije f.
3. $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ne obstaja

5.3 Zveznost funkcij

Definicija: Funkcija f je zvezna v točki a, če je limita funkcije enaka funkcijski vrednosti:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

To pomeni:

- Funkcija je v točki a definirana.
- Limita funkcije v točki a obstaja.
- Obe vrednosti sta enaki.

Drugače: Majhna sprememba x-a pomeni majhno spremembo funkcijske vrednosti:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Graf zvezne funkcije je nepretrgana krivulja.

Definicija: Če velja

- $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, je funkcija f zvezna z desne strani,
- $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$, je funkcija f zvezna z leve strani.

Funkcija je v točki a zvezna, če je v tej točki zvezna z leve in desne.

Definicija: Funkcija f je zvezna na odprtem intervalu (a, b), če je zvezna v vsaki točki tega intervala.
Funkcija f je zvezna na zaprtem intervalu $[a, b]$, če je zvezna na odprtem intervalu (a, b) ter če je zvezna z desne strani v točki a in zvezna z leve strani v točki b.

Lastnosti zveznih funkcij na zaprtem intervalu: Funkcija f naj bo zvezna na zaprtem intervalu $[a, b]$. Nadalje naj bo $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$ in $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$.

1. Če funkcija f v krajiščih intervala zavzame nasprotno predznačeni vrednosti ($f(a)f(b) < 0$), potem v neki točki znotraj intervala zavzame vrednost nič ($\exists x_0 \in (a, b) : f(x_0) = 0$).

2. Funkcija f zavzame minimalno in maksimalno vrednost ($\exists x_m \in (a, b) : f(x_m) = m$ in $\exists x_M \in (a, b) : f(x_M) = M$).

3. Zvezna funkcija ima na končnem intervalu vedno končno vrednost (med minimalno in maksimalno).

4. Funkcija f zavzame vse vrednosti med m in M ($\forall y \in [m, M] \quad \exists x_y \in [a, b] : f(x_y) = y$).

5.4 Elementarne funkcije

Osnovne elementarne funkcije:

1. Potenčna funkcija $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{R}$
2. Eksponentna funkcija $f(x) = a^x, \quad a > 0$
3. Logaritemska funkcija $f(x) = \log_a x, \quad a > 0, a \neq 1$
4. Kotne funkcije

$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x, \quad f(x) = \tan x, \quad f(x) = \cot x$$

5. Krožne funkcije (inverzne kotne funkcije)

$$f(x) = \arcsin x, \quad f(x) = \arccos x, \quad f(x) = \arctan x$$

Med elementarne funkcije spadajo vse funkcije, ki jih dobimo z osnovnimi elementarnimi funkcijami in operacijami:
seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje, računanje kompozituma in računanje inverzne funkcije.

Posebej:

1. Polinomi $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$
2. Racionalne funkcije $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p$ in q sta polinoma

Viri

1. Cedilnik, A.: Matematični priročnik. Didakta, Radovljica, 1997
2. Fošner, M.: Uporaba matematičnih metod v logistiki 1. e-gradivo
3. Jamnik, R.: Matematika. DMFA, Lj, 1994
4. Turnšek, A.: Tehniška matematika. UL, FS, Lj, 2006
5. Usenik, J.: Matematične metode v prometu. UL, FPP, Portorož, 1998